Moments : solved examples مسائل محلول على العزوم حول نقطة وحول محور واختزال القوى

Emil Shoukralla
Menoufia University

مسائل محلولة على الباب الثاني العزوم واختزال القوى الفراغية
Moments and Reduction of Forces

1

إذا أثرت القوة $\vec{F}=3\hat{i}-\hat{j}+7\hat{k}$ ، في نقطة الأصل فما هو عزمها حول النقطة $P(4,4,6)$.

Solution

إذا رمزنا لعزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة $P(4,4,6)$ بالرمز $\vec{M}_P$ ، فإننا نجد أن

$$\vec{M}_P=\vec{M}_O-\left(\vec{a}\wedge\vec{F}\right)$$

حيث $\vec{M}_O$ هو عزم القوة $\vec{F}$ حول نقطة الأصل وهو منعدم هنا، بمعنى أن $\vec{M}_O=0$ ، لأن القوة تؤثر في نقطة الأصل. أيضاً فإن

$$\vec{a}=\vec{OP}=4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$$

وبالتالي فإن

$$\vec{M}_P=-\vec{a}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & 4 & 6\\ 3 & -1 & 7\end{vmatrix}=-34\hat{i}+10\hat{j}+16\hat{k}$$

3

أوجد العزم حول النقطة $G(2,2,-3)$ لقوة مقدارها *4* وحدة نيوتن، و تمر بالنقطة $P(3,2,-1)$ وتتناسب جيوب تمام خط عملها مع $(2,3,1)$.

Solution

لنرمز للقوة المراد إيجاد عزمها بالرمز $\vec{F}$. إذن

$$\vec{F}=4\left(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}\right)$$

أيضاً،

$$\vec{M}_G=\vec{M}_O-\left(\vec{a}\wedge\vec{F}\right)$$

حيث

$$\vec{M}_O=\vec{OP}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 8 & 12 & 4\end{vmatrix}=20\hat{i}-20\hat{j}+20\hat{k}$$

وبما أن

$$\vec{a} = \vec{OG} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

إذن

$$\vec{M}_G = \left(20\hat{i} - 20\hat{j} + 20\hat{k}\right) - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} = \left(20\hat{i} - 20\hat{j} + 20\hat{k}\right) - \left(44\hat{i} - 32\hat{j} + 8\hat{k}\right)$$

$$= -24\hat{i} + 12\hat{j} + 12\hat{k}$$

وبطريقة أخرى مباشرة نجد أن

$$\vec{M}_G = \vec{GP} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} = -24\hat{i} + 12\hat{j} + 12\hat{k}$$

5

أوجد متجه عزم القوة $\vec{E} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ، والتي تؤثر في النقطة $(1,2,1)$ حول محور يمر بنقطة الأصل في اتجاه المتجه $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$.

Solution

إذا رمزنا لهذا المحور بالرمز L، فإن متجه عزم القوة $\vec{E}$ حول هذا المحور L هو

$$\vec{M}_L = \left|\vec{M}_L\right| \hat{L}$$

حيث $\hat{L}$ هو متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{B}$، أي أن

$$\hat{L} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{k}}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{k}$$

وبما أن هذا المحور يمر بنقطة الأصل $O\,(0,0,0)$، والقوة تمر بالنقطة $(1,2,1)$، إذن فإن $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ، وبالتالي نجد أن

$$\left|\vec{M}_L\right| = \hat{L}\cdot\vec{M}_O = \hat{L}\cdot\left(\vec{r}\wedge\vec{E}\right) = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{6}{\sqrt{13}} - \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

وهكذا نجد أن متجه عزم القوة $\vec{E}$ حول المحور L هو المتجه

$$\vec{M}_L = \left|\vec{M}_L\right|\hat{L} = \frac{-3}{\sqrt{13}}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{k}\right) = \frac{-6}{13}\hat{i} + \frac{9}{13}\hat{k}$$

7

فئة من القوىالفراغية تتكون من قوة $\vec{F_1}$ مقدارها F، وخط عملها ينطبق على محور ـ OX في الاتجاه الموجب، وقوة $\vec{F_2}$ مقدارها 2F وتؤثر في المستقيم الذي يمر بالنقطة $(0,2,0)$ في اتجاه محور Z، وقوة $\vec{F_3}$ مجهولة المقدار خط عملها يمر بالنقطة $(2,2,0)$. أوجد شرط أن تؤول هذه المجموعة من القوى إلى قوة وحيدة، ثم احسب أقل مقدار للقوه $\vec{F_3}$.

Solution

في هذا المثال لدينا

$$\vec{F_1} = F\ \hat{i} + 0\hat{j} + 0\ \hat{k},\ \vec{F_2} = 0\ \hat{i} + 0\hat{j} + 2F\ \hat{k} \qquad \text{(i)}$$

بما أن النقطة $(0,0,0)$ تقع على خط عمل القوة $\vec{F_1}$، بينما تقع النقطة $(0,2,0)$ على خط عمل القوة $\vec{F_2}$، إذن فإن متجهي الموضع لهاتين النقطتين. على الترتيب. هما

$$\vec{r_1} = 0\ \hat{i} + 0\hat{j} + 0\ \hat{k},\ \vec{r_2} = 0\ \hat{i} + 2\hat{j} + 0\ \hat{k} \qquad \text{(ii)}$$

أيضاً فإن القوة المجهولة $\vec{F_3}$ يمكن تمثيلها في الفضاء ثلاثي الأبعاد في الصورة

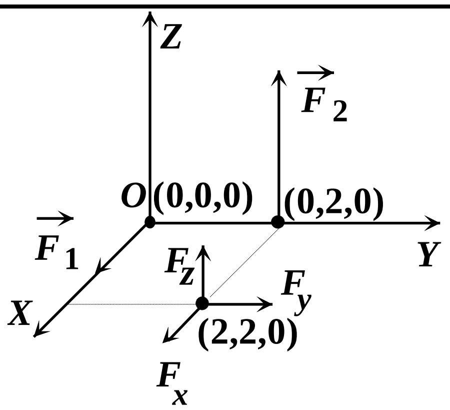
$$\vec{F_3} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \qquad \text{(iii)}$$

وبما أن النقطة $(2,2,0)$ تقع على خط عمل القوة $\vec{F_3}$ إذن فإن متجه موضع هذه النقطة هو

$$\vec{F_3} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \qquad \text{(iv)}$$

انظر الشكل.

شكل



لنفرض الآن أن فئة كل القوى تكافىء عند O قوة وحيدة (المحصلة) $\vec{R}$ وازدواج محصل $\vec{Q}_0$، إذن فإن هذه القوة الوحيدة المحصلة هي

$$\vec{R} = (F + F_x)\hat{i} + (F_y)\hat{j} + (2F + F_z)\hat{k} \tag{v}$$

وبالتالي فإن

$$X = F + F_x \ ; Y = F_y \ ; Z = 2F + F_z \tag{vi}$$

أما الازدواج المحصل فمتجه عزمه هو

$$\vec{Q}_0 = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (4F + 2F_z)\hat{i} - (2F_z)\hat{j} + (2F_y - 2F_x)\hat{k} \tag{vii}$$

وإذا فرضنا أن $\vec{Q}_0 = L\hat{i} + M\hat{j} + N\hat{k}$، عندئذٍ فإننا نحصل على الثلاث معادلات

$$L = 4F + 2F_z \ , \ M = -2F_z \ , \ N = 2F_y - 2F_x \tag{viii}$$

وبالتعويض من (vi), (viii) نجد أن الشرط اللازم لكي تؤول القوة المحصلة والازدواج المحصل إلى قوة وحيدة هو

$$(4F + 2F_z)(F + F_x) - 2F_z F_y + (2F_y - 2F_x)(2F + F_z) = 0$$

أو (بعد الاختصار)

$$2F + 2F_y + F_z = 0 \tag{ix}$$

وللحصول على أقل قيمة ممكنة للقوة $\vec{F}_3$، بحيث تؤول كل القوى المعطاة إلى قوة وحيدة، نجد من (i) أن

$$(F_3)^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \quad \text{(x)}$$

إذن، وبالتعويض عن قيمة F_z من (ix) في (i) نحصل على

$$(F_3)^2 = F_x^2 + F_y^2 + \left(2F + 2F_y\right)^2$$

نلاحظ هنا أن القوة F_3 تعتمد على المركبات P_x, P_y فقط، إذن ولكي تكون القوة F_3 أقل ما يمكن فيجب أن نبحث عن P_x, P_y التي تحقق المعادلات

$$\frac{\partial F_3}{\partial F_x} = 0, \; \frac{\partial F_3}{\partial F_y} = 0$$

وبالتالي فإن

$$2F_3 \frac{\partial F_3}{\partial F_x} = 2F_x + 2\left(2F + 2F_y\right) \times 0 = 2F_x = 0$$

ومنها نجد أن

$$F_x = 0 \quad \text{(xi)}$$

وأيضا فإن

$$2F_3 \frac{\partial F_3}{\partial F_y} = 2F_y + 2\left(2F + 2F_y\right) 2 = 10F_y + 8F = 0$$

ومنها نجد أن

$$F_y = \frac{-4F}{5} \quad \text{(xii)}$$

وبالتعويض عن F_y من المعادلة رقم (xii) في المعادلة (ix) نحصل على

$$F_z = \frac{-2F}{5} \quad \text{(xiii)}$$

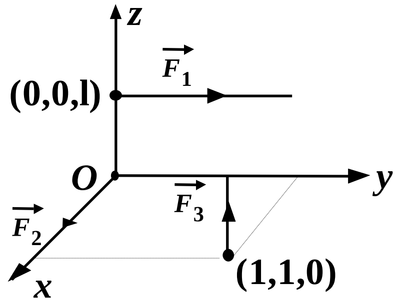
وبالتعويض في (x) من (xi), (xii), (xiii) نحصل على أقل مقدار للقوة $\vec{F}_3$ ، ونجد أنه يساوي

$$F_3 = \sqrt{\frac{16F^2}{25} + \frac{4F^2}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} F$$

9

تؤثر ثلاث قوى فراغية $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^{3}$ متساوية، مقدار كل منها واحد نيوتن على جسم متماسك كما في الشكل المبين اختزل فئة القوى إلى لولبية، وأوجد المعادلة القياسية لمحورها المركزي.

الشكل



Solution

نحاول اختزال فئة القوى المعطاة إلى قوة $\vec{R}$ وازدواج $\vec{Q_0}$، عند نقطة الأصل O. بما أن

$$\vec{F_1} = \hat{j}\,,\ \vec{F_2} = \hat{i}\,,\ \vec{F_3} = \hat{k} \qquad \text{(i)}$$

إذن فإن

$$\vec{R} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \qquad \text{(ii)}$$

وعندئذٍ فإن

$$X = 1,\ Y = 1,\ Z = 1 \qquad \text{(iii)}$$

أيضاً فإننا نجد أن الازدواج المحصل $\vec{Q_0}$ هو

$$\vec{Q_0} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{j} \qquad \text{(iv)}$$

إذن فإن

$$L = 0,\ M = -1,\ N = 0 \qquad \text{(v)}$$

واضح . طبعاً . أن الزاوية بين $\vec{R}$ والازدواج $\vec{Q_0}$ ليست قائمة وبالتالي فإن فئة القوى لايمكن اختزالها إلى قوة مفردة. لكن، على أية حال سوف نختزلها إلى لولبية. من المعادلة (iii) نجد أن شدة اللولبية هو المقدار

$$R = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

أيضاً، من المعادلتين (ii), (iv) . نجد أن عزم اللولبية هو المقدار

$$W = \frac{\vec{R}\cdot\vec{Q_O}}{R} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \qquad \text{(vi)}$$

أما خطوة اللولبية فنجدها في الصورة

$$h = \frac{-1}{3} \qquad \text{(vii)}$$

هذا، ولتعيين معادلتي خط عمل المحور المركزي (خط عمل القوة $\vec{R}$) نوجد . أولاً . احداثيات أية نقطة (x, y, z) على هذا الخط باستخدام المعادلات (2.67), (vi), (viii)، حيث نجد أن

$$x = \frac{1}{3},\ y = 0,\ z = \frac{-1}{3}$$

وهكذا نجد أن المعادلة القياسية للمحور المركزي للولبية هي

$$\frac{3\tilde{x}+1}{3} = \frac{\tilde{y}}{1} = \frac{3\tilde{z}-1}{3}$$

حيث $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ هي أية نقطة مجهولة على خط عمل المحور المركزي.

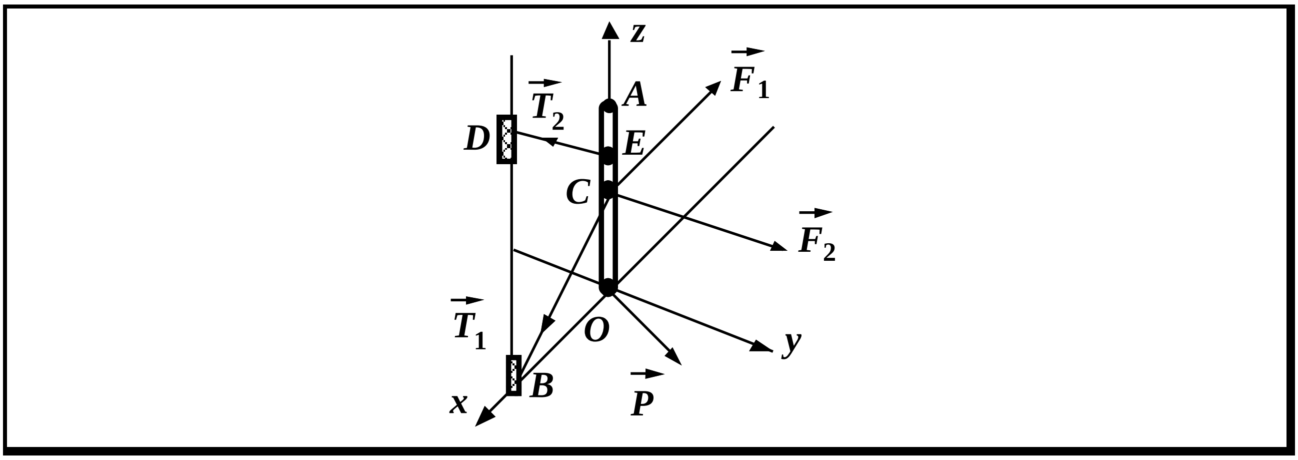
11

ترتكز ذراع خفيفة AO طولها $10\ ft.$ على مفصل كروي عند نقطة الأصل O. لحفظ اتزان الذراع ربطت عند النقطة $B(5,0,0)$ بواسطة كابل CB طرفه الآخر مثبت عند النقطة $C(0,0,5)$، كما ربطت الذراع . أيضاً . عند النقطة $E(0,0,7)$ بواسطة كابل آخر DE طرفه الآخر مثبت عند النقطة $D(0,-5,7)$. تؤثر القوتان $\vec{F}_1 = -F\,\hat{i},\ \vec{F}_2 = 2F\,\hat{j}$ على الذراع عند النقطة C، اثبت أنه يجب أن يتحقق الشرط: $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ لكي تظل المجموعة متزنة.

Solution

يمكن تلخيص معطيات المسألة في الشكل.

شكل



نفرض أن قوى الشد في الكابلين CB, DE هما $\vec{T_1}, \vec{T_2}$ على الترتيب، وأن رد فعل المفصل عند O هو القوة $\vec{P}$ المجهولة في المقدار والاتجاه، إذن فإن القوى المؤثرة على الذراع تصبح

إذن القوى الخمس المؤثرة على الذراع هي

$$\vec{F_1} = -F\ \hat{i}\ ,\ \vec{F_2} = 2F\ \hat{j}\ ,\ \vec{T_2} = -T_2\hat{j}\ ,\ \vec{P};$$

$$\vec{T_1} = T_1\hat{T_1} = \frac{T_1}{\sqrt{2}}\left(\hat{i} + 0\hat{j} - \hat{k}\right)$$

حيث

$$\hat{T_1} = \widehat{CB} = \frac{5\hat{i} + 0\hat{j} - 5\hat{k}}{5\sqrt{2}} = \frac{\hat{i} + 0\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{2}}$$

من المناسب أن نوجد متجه العزم المحصل أو مجموع متجهات عزوم القوى حول نقطة الأصل O لأن هذا يعني تلاشي متجه عزم القوة المجهولة $\vec{P}$ التي تمر بالنقطة O، إذن فإن

$$\vec{Q_O} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ -F & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2F & 0 \end{vmatrix} + \frac{T_1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & -T_2 & 0 \end{vmatrix} = -5F\ \hat{j} - 10F\ \hat{i} + \frac{T_1}{\sqrt{2}}\left(5\hat{j}\right) + 7T_2\hat{i} = \left(-10F + 7T_2\right)\hat{i} + \left(\frac{5T_1}{\sqrt{2}} - 5F\right)\hat{j}$$

وبالتالي فإن

$$L = -10F + 7T_2,\ M = \frac{5T_1}{\sqrt{2}} - 5F$$

وبما أن المجموعة متزنة، إذن، فإن المركبتين L, M يجب أن تتلاشيا، إذن فإن

$$-10F + 7T_2 = 0,\ \frac{5T_1}{\sqrt{2}} - 5F = 0$$

وبحذف F من هاتين المعادلتين نجد أن

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

****