الباب
3

اتزان الأجسام المتصلة
بمفصلات ملساء - Smooth Hinges

في هذا الباب ندرس اتزان الاجسام المتماسكة المتصلة بمفصلات ملساء *(Smooth Hinges)* تحت تأثير القوى المستوية *(Coplanar Forces)*.
هذا، والأجسام المتصلة بمفصلات بالطبع ليست أجساماً حرة، وذلك كنتيجة طبيعية لاتصالها بأجسام أخرى. والأجسام المتصلة بمفصلات تسمى بالأجسام المقيدة *(Constrained Bodies)*. فالجسم الموضوع على منضدة تمنعه من السقوط إلى أسفل، أو الباب المتصل بمفصل يحفظ له حالة الاتزان أو يحفظ له الحركة حول محور الدوران هي أجسام مقيدة، حيث يسمى كل من المنضدة والباب "القيود" *(Constraints)*.
هذه القيود هي التي تحد من حركة هذه الأجسام في اتجاه معين. فإذا أثرت . مثلاً . مجموعة من القوى على جسم مقيد فإن الجسم يؤثر بدوره على القيد بقوة تسمى قوة الضغط أو قوة الحمل *(Tension)*، وفي المقابل فإن القيد نفسه يرد على هذه القوة بقوة أخرى تسمى قوة القيد *(Force of Constraint)* تكون مساوية لهذا الحمل أو هذا الضغط ولكن في الاتجاه العكسي. على أية حال دعنا بداية نقدم بعض التعريفات والمفاهيم الهامة في علم الإستاتيكا.

تعريف 3.1 الجسم الحر – *A Free Body*

هو جسم غير متصل بأي أجسام أخرى ويمكن تحريكه من أي وضع وفي أي اتجاه في الفراغ.

تعريف 3.2 **المفصل الأملس – *Smooth Hinge***

هو عبارة عن مسمار أُسطواني يدخل في ثقوب أُسطوانية متساوية محفورة في الأجسام بحيث يسمح لها بإمكانية الدوران حول المسمار بدون أي احتكاك (*Friction*)، وبحيث يؤول رد الفعل على أي جسم من هذه الأجسام إلى قوة واحدة تمر بمركز المسمار، وبالتالي يمكن تحليلها إلى مركبتين متعامدتين.

✍.

3.1 طرق ارتكاز الجسم المتماسك في المستوى

الجسم المتماسك يمكن أن يرتكز في المستوى بطرق مختلفة؛ حيث تؤثر طبيعة الارتكاز على شكل ردود الأفعال الناتجة وإمكانية دوران الجسم. كذلك إذا اتصل بمفصلة ملساء جسمان فقط فإن المفصل تؤثر على الجسمين بقوتين متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه. وإليك بعض أنواع طرق الارتكاز.

I **الارتكاز البسيط**

وفيه يكون رد الفعل عمودياً على المستوى المماسي للسطحين المتلامسين باعتبار أنهما أملسان، أو يكون رد الفعل عمودياً على اتجاه أية حركة نسبية بينهما ويكون اتجاه رد الفعل محدداً.

II **الارتكاز عن طريق المفصل**

وهذا النوع يعني تثبيت نقطة من الجسم بحيث يمكن أن يدور الجسم حولها، ويكون المفصل في المستوى على هيئة ثقب دائري بداخله مسمار اسطواني، وفي هذه الحالة يكون رد الفعل غير محدد الاتجاه ويمكنك تحليله إلى مركبتين.

III **الارتكاز عن طريق التثبيت**

عند تثبيت قضيب ما في حائط . مثلاً . فإن عملية التثبيت تمنع الحركة الخطية والحركة الدورانية عند الطرف المثبت، وينتج عن ذلك قوى حول الجزء المثبت متوازنة مع محصلة القوى المؤثرة، ويمكن اختزال رد الفعل عند نقطة التثبيت إلى قوة وعزم يكافئان محصلة القوى المؤثرة.

IV الارتكاز عن طريق السواند والشدات

يمكن تعريف السواند والشدات على أنها قضبان خفيفة وقصيرة تربط نقطة من الجسم بنقطة أخرى من جسم ثابت وردود الفعل في هذه الحالة تكون في اتجاه القضبان.

3.2 الأجسام المتصلة بمفصلات

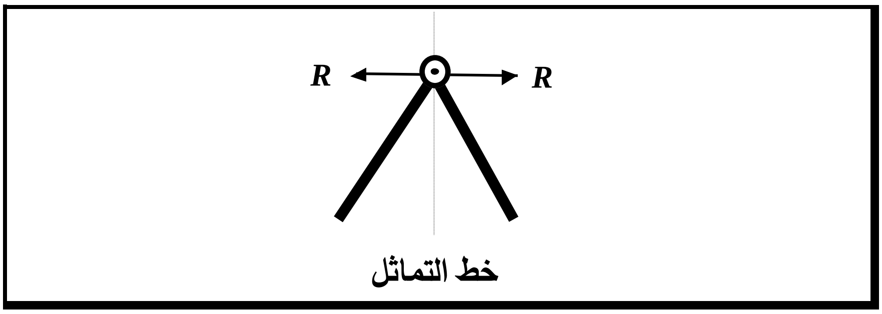
عندما يتصل جسمان اتصالاً مفصلياً عن طريق مفصل وكان المفصل أملس فإن رد فعل أحد الجسمين على الآخر يكون عبارة عن قوة تساويها في المقدار وتضادها في الاتجاه، هذه القوة تمثل رد فعل الجسم الثاني على الجسم الأول ولهذا يكون المفصل في حالة اتزان.

وفي هذه الحالة فإن مقدار واتجاه أيٍ من القوتين يكون غير معلوم. عندئذٍ نفترض أن الفعل على المفصل الأملس يتكون من مركبتين متعامدتين، وبالتالي يكون رد فعل المفصل على الجسم الآخر مكوناً من مركبتين متعامدتين متساويتين مع الأولى في المقدار ومتضادتين معها في الاتجاه.

انتبه !

إذا كونت مجموعة من القضبان الثقيلة المتصلة بالمفصلات الملساء هيكلاً وكان الهيكل والقوى المؤثرة عليه متماثلة حول خط يمر بأية مفصلة فإن ردود الأفعال عند هذه المفصلات تكون عمودية على خط التماثل. انظر شكل (3.1).

شكل 3.1



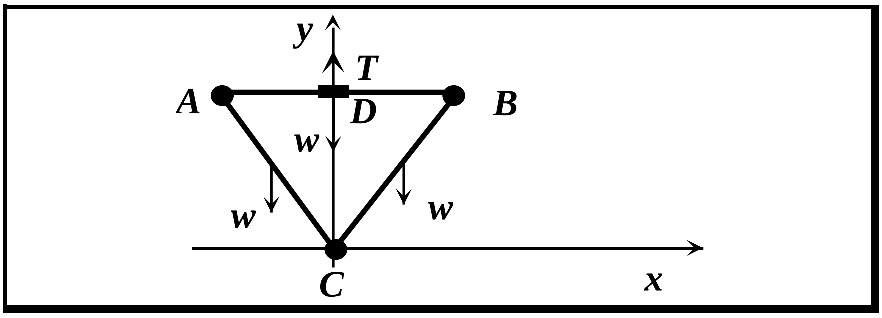
مثال 3.1

ثلاثة قضبان متساوية في الطول والوزن، ومتصلة ببعضها اتصالاً مفصلياً أملس لتكون مثلثاً متساوي الأضلاع. فإذاُ علقت المجموعة من نقطة في منتصف أحد الأضلاع. عين ردود الافعال عند المفاصل.

الحل

لحل هذا المثال نتبع خطوتين: الخطوة الأولى تختص بدراسة اتزان الهيكل المكون من القضبان الثلاثة ككل، والخطوة الثانية تختص بدراسة اتزان كل قضيب من قضبان الهيكل على حدة. لنختر الاتجاهات الموجبة لمحوري الإحداثيات الكارتيزية $x,\ y$ كما هو في شكل (3.2). لدراسة اتزان المجموعة ككل، نفرض أن وزن القضيب هو w، وأن l هو طول ضلع المثلث، وأن T هو الشد عند نقطة التعليق كما هو مبين في شكل (3.2).

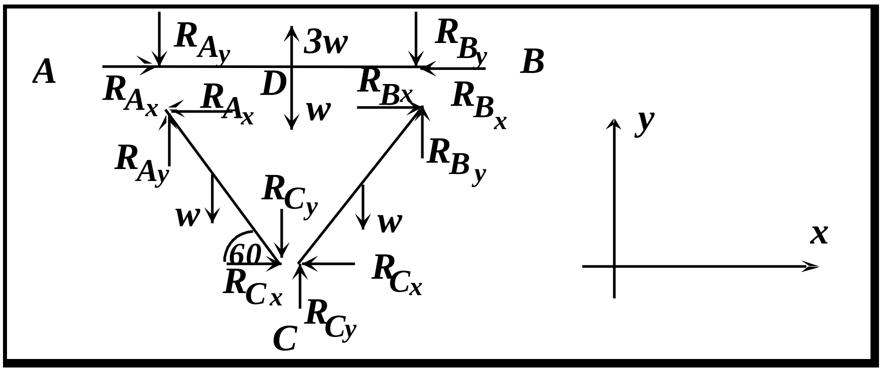
شكل 3.2



بما أن وزن كل قضيب يؤثر في منتصفه، والمجموعة متزنة، إذن فإن

$$T = 3w \qquad \text{(i)}$$

الآن ندرس اتزان كل قضيب على حدة. لنفرض اتجاهات ردود الأفعال كما هو مبين في شكل (3.3) - مع ملاحظة أنه إذا حصلنا على رد فعل بإشارة سالبة يكون اتجاهه عكس الاتجاه المفروض.



شكل 3.3

بدراسه اتزان القضيب AB نجد أن محصلة القوى في اتجاه محور x . تساوي الصفر أو

$$R_{A_x} - R_{B_x} = 0 \;\Rightarrow\; R_{A_x} = R_{B_x} \qquad \text{(ii)}$$

كما نجد أن محصلة القوى المؤثرة على القضيب AB في اتجاه محور y . تساوي الصفر أي أن

$$R_{A_y} + R_{B_y} + w = 3w$$

أو

$$R_{A_y} + R_{B_y} = 2w \qquad \text{(iii)}$$

وبما أن شروط اتزان جسم متماسك تحت تأثير فئة من القوى المستوية هو أن العزم المحصل يتلاشى، ولأن الفضيب AB متزن، إذن فإن مجموع عزوم كل القوى المؤثرة عليه حول نقطة التعليق D (مجموع حاصل ضرب مقدار القوة في البعد العمودي من النقطة D إلى خط عمل القوة) يساوي الصفر. فإذا كانت المسافة من نقطة تأثير القوة R_{A_y} إلى نقطة التعليق D تساوي المسافة من نقطة تأثير

القوة R_{B_y} إلى نقطة التعليق D تساوي h مثلاً، عندئذٍ فإن مجموع العزوم حول النقطة D يعطي

$$R_{A_y} \times h - R_{B_y} \times h = 0 \Rightarrow R_{A_y} = R_{B_y} \qquad \text{(iv)}$$

وبالتعويض من (iv) في (iii) نجد أن

$$2R_{A_y} = 2w \quad \Rightarrow \quad R_{A_y} = R_{B_y} = w \qquad \text{(v)}$$

دراسة اتزان القضيب AC : مجموع عزوم كل القوى المؤثرة على القضيب AC حول النقطة C يساوي الصفر وبالتالي فإن

$$-R_{A_y}\left(l\cos(60)\right) + w\left(\frac{l}{2}\cos(60)\right)$$

$$+R_{A_x}\left(l\sin(60)\right) = 0$$

بالقسمة على l، والتعويض عن R_{A_y} من المعادلة (v)، وملاحظة أن

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نجد أن

$$-\frac{1}{2}w + \frac{1}{4}w + \frac{\sqrt{3}}{2}R_{A_x} = 0$$

وبالتالي فإن

$$R_{A_x} = \frac{w}{2\sqrt{3}} \qquad \text{(vi)}$$

أيضاً القضيب AC متزن تحت تأثير القوى المؤثرة عليه، وبالتالي نجد أن محصلة القوى الأفقية تساوي الصفر، الأمر الذي يعني أن

$$R_{C_x} = R_{A_x} \qquad \text{(vii)}$$

إذن، من (vi), (vii) فإن

$$R_{C_x} = \frac{w}{2\sqrt{3}} \qquad \text{(viii)}$$

أيضاً فإن مجموع المركبات الرأسية للقوى المؤثرة على للقضيب AC تساوى الصفر، الأمر الذي يعني أن

$$R_{C_y} - R_{A_y} + w = 0 \qquad \text{(ix)}$$

بالتعويض من (v) في (ix) نجد أن

$$R_{C_y} = 0 \qquad \text{(x)}$$

وهكذا يمكن أن نجد من (v), (vi) أن مقدار رد الفعل عند المفصل A . مثلاً . هو

$$R_A = \sqrt{\left(R_{A_x}\right)^2 + \left(R_{A_y}\right)^2} = \sqrt{\frac{w^2}{12} + w^2} = w\sqrt{\frac{13}{12}}$$

وبالمثل يمكن من المعادلتين (x), (viii) الحصول على رد الفعل عند المفصل C لنجد أنه

$$R_C = \sqrt{\left(R_{C_x}\right)^2 + \left(R_{C_y}\right)^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{w}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{w}{2\sqrt{3}}$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن الحصول على رد الفعل R_B عند المفصل B.

✍.

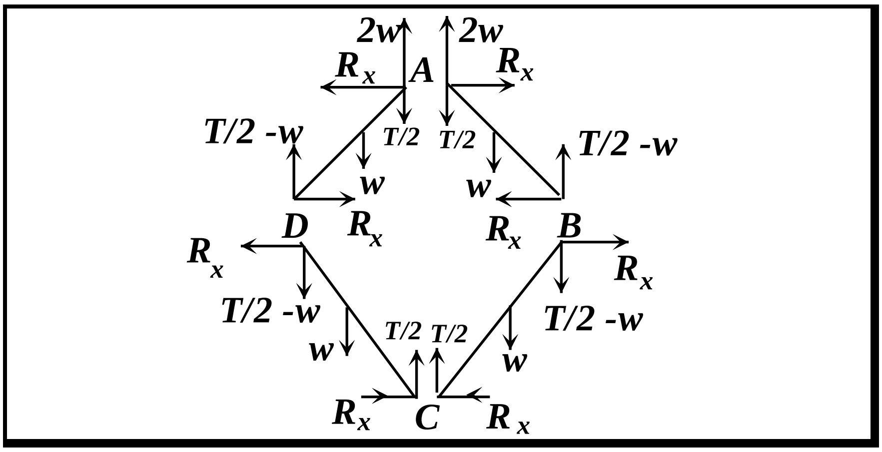
مثال 3.2 يتكون المربع $ABCD$ من أربعة قضبان ثقيلة متساوية، وزن كل منها w متصلة ببعضها اتصالاً سهلاً بمفصلات ملساء. عُلّقت المجموعه من نقطة A، وحفظ الشكل مربعاً بواسطة خيط يصل بين A, C. أوجد الشد في الخيط، ومقدار، واتجاه رد فعل المفصل.

الحل بدراسة اتزان المجموعة ككل، نجد أن قوة التعليق تساوي مجموع أوزان القضبان الأربعة، أي تساوي $4w$.

بما أن AC محور تماثل، إذن فإن رد فعل كل من المفصلين A, C يكون عمودياً على AC . أيضاً فإن AC هو محور تماثل بالنسبة إلى

قوة التعليق $4w$ ولذا فهو يقسمها إلى قوتين متماثلتين قيمة كل منهما $2w$. كذلك فإن AC يعتبر محور تماثل بالنسبة إلى قوة الشد T، وبالتالي فهو يقسمها إلى قوتي شد متساويتين، كل منهما $T/2$. نفرض أن طول ضلع المربع هو $2l$؛ ونرسم هذه المجموعة فنحصل على شكل (3.4).

شكل 3.4



من تماثل المجموعة حول AC نكتفي بدراسة اتزان القضيبين AB, BC فقط. بدراسة اتزان القضيب AB على حدة، وبأخذ العزوم حول نقطة A، نجد أن

$$\left(\frac{T}{2}-w\right)\left(2l\cos(45)\right)-R_x\left(2l\cos(45)\right)$$
$$-w\left(l\cos(45)\right)=0 \qquad \text{(i)}$$

ومنها نجد أن

$$T-2R_x=3w \qquad \text{(ii)}$$

بدراسه اتزان القضيب BC، وبأخذ العزوم حول نقطة C نحصل على

$$w\left(l\cos(45)\right)+R_x\left(2l\cos(45)\right)$$
$$+\left(\frac{T}{2}-w\right)\left(2l\cos 45\right)=0 \qquad \text{(iii)}$$

أو

$$T+2R_x=w \qquad \text{(iv)}$$

من (ii), (iv) نجد أن

$$T = 2w\,, \quad R_x = -\frac{w}{2} \qquad \text{(v)}$$

إذن، رد فعل المفصل أفقي، ويساوي $\frac{w}{2}$، وفي عكس الاتجاه المبين بشكل (3.4).

✍.

3.3 مسائل

(1) تتصل ثلاثة قضبان متساوية، وزن كل منها w اتصالاً مفصلياً سهلاً عند نهاياتها لتكون مثلثاً متساوي الاضلاع ABO. ثبت الضلع AO من النقطة C التي تبعد مسافة تساوي ربع طول القضيب عن نقطة O. إذا كان القضيب AB أفقياً بحيث تكون المفصل عند النقطة O أسفل القضيب AB، عين القوة والازدواج اللازمين لحفظ الشكل متزناً وعين كذلك رد الفعل عند المفصل O.

(2) AB قضيب منتظم وزنه w، ومتصل اتصالاً مفصلياً أملس عند A في حائط ثابت. ويؤثر على القضيب قوة شد أفقية T حتى يصبح القضيب متزناً في وضع مائل على الرأسي بزاوية 30°، أوجد مقدار قوة الشد T، وكذلك رد فعل المفصل.

(3) قضيبان منتظمان خفيفان AB, CD، متساويان طولاً، ومتصلان ببعضهما البعض اتصالاً مفصلياً أملساً عند منتصفيهما. القضيبان موضوعان في مستوى رأسي بحيث يستند الطرفان A, C على منضدة أفقية ملساء. وضع قرص دائري نصف قطره r ووزنه w بين القضيبين بحيث يكون مستواه رأسياً. لحفظ اتزان الهيكل تم ربط

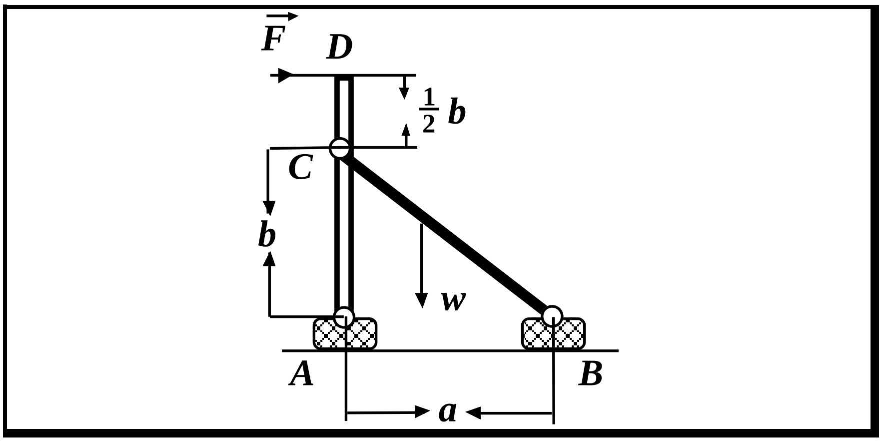
طرفي القضيبين A, C بواسطة خيط بحيث تكون الزاوية المحصورة بين القضيبين $\frac{\pi}{3}$. أوجد الشد في الخيط.

(4) قضيب أملس OA مثبت عند طرفه السفلي O ويصنع زاوية 45° مع الأفقي. رُبط من طرفه الأعلى A بحبل AB طوله 60 cm يحمل عند نهايته B كتلة مقدارها 60 kg. فإذا ُربطت B إلى حبل آخر BC طوله 20 cm ينتهي بحلقة خفيفة عند C بحيث تنزلق الحلقة على القضيب OA. أوجد الشد في AB عند الاتزان.

(5) يتصل القضيبان AB, CB، المنتظمان، والمتساويان في الطول والوزن بمفصلة سهلة عند B. يرتكز القضيبان عند A, C على منضدة أفقية ملساء. لحفظ اتزان الهيكل علقت كتلة مساوية لكتلة أي من القضيبين في منتصف خيط خفيف يصل بين منتصفي القضيبين بحيث تكون زاوية ميله على الرأسي β، وزاوية ميل أي من القضيبين على الرأسي هي α. أوجد العلاقة بين الزاويتين α, β في وضع الاتزان.

(6) يتكون المربع ABCD من أربعه قضبان منتظمة متصلة مع بعضها اتصالاً مفصلياً سهلاً. علقت المجموعة من نقطة A، بينما يصل خيط بين منتصفي AB, BC لحفظ الشكل مربعاً. فإذا كان وزن كل قضيب هو w. اثبت أن الشد في الخيط يساوي 4w، وأوجد كذلك رد فعل المفصل عند كل المفصلات.

(7) أوجد ردود الأفعال عند المفصلتين A, C للهيكل المبين في شكل (3.5)، حيث تساوي القوة الأفقية $\vec{F}$ نصف وزن القضيب BC.



شكل 3.5

(8) جسم متماسك على شكل زاوية قائمة ABC معلق مفصلياً من نقطة A ويرتكز على وتد أملس عند BA، ويصنع زاوية θ مع الرأسي. أوجد رد فعل الوتد C، واستنتج قيمة θ التي يتلاشى عندها رد الفعل هذا. وإذا كانت $\theta = 60^\circ$ فأوجد قيمة القوة F، التي يلزم التأثير بها على خط العمل CB لحفظ الاتزان بدون الوتد. وأوجد رد فعل المفصل A في هذه الحالة. علماً بأن وزن BC يساوي ضعف وزن AB في الحالتين.

****