احتمالات واحصاء

المحاضرة ٦

الفرقة الثالثه

كيمياء

التوزيع الهندسي الزائدي

١- التوزيع الهندسي الزائدي

إذا كان لدينا مجتمع يحتوي علي N من العناصر منها M من العناصر التي تنتمي الي الفئة C والباقي $N-M$ من العناصر ينتمي الي الفئة C' فإذا سحبت عينة عشوائية حجمها n بدون ارجاع من ذلك المجتمع فإنه ينشأ التوزيع الهندسي الزائدي وذلك عندما نعرف متغير عشوائي X علي النحو التالي:

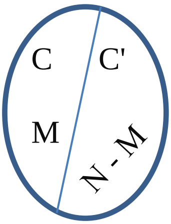
تعريف:

المتغير العشوائي X في الفراغ المنفصل يكون له توزيعا هندسيا زائديا إذا كانت له دالة كتلة احتمالية علي الصورة التالية:

$$P_X(k) = P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

حيث:

$$0 \le k \le n, n \le N-M,\ \ n \le N,\ \ k = 0,1,2,\dots,n,\ \ n \le \min(M, N-M)$$



$$p = \frac{M}{N} \Rightarrow M = Np, \qquad q = \frac{N-M}{N} \Rightarrow N-M = Nq$$

يمكن كتابة التوزيع الاحتمالي علي الصورة:

$$P_X(k) = P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

ملاحظة:

$$\binom{n+m}{k}=\binom{n}{k}\binom{m}{0}+\binom{n}{k-1}\binom{m}{1}+\binom{n}{k-2}\binom{m}{2}+\ldots+\binom{n}{0}\binom{m}{k}$$
$$=\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{k-r}\binom{m}{r}$$

للتأكد من أن الدالة $P_X(k)$ تمثل دالة كتلة احتمالية يجب أن يكون:

$$\sum_{x} P_X(x)=1$$

$$L.H.S=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$$

$$=\frac{1}{\binom{N}{n}}.\binom{N}{n}=1$$

مثال:

احسب التوقع الرياضي والتباين الرياضي للتوزيع الهندسي الزائدي

الحل:

لحساب التوقع الرياضي يكون لدينا:

$$E[X]=\sum_{x} x.P_X(x)$$

$$\therefore E[X]=\sum_{x=0}^{n} x\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=0}^{n} x.\frac{M!}{x!(M-x)!}\binom{N-M}{n-x}$$

$$=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=0}^{n}\frac{M!}{(x-1)!(M-x)!}\binom{N-M}{n-x}$$

$$=\frac{M}{\binom{N}{n}}\sum_{x=0}^{n}\binom{M-1}{x-1}\binom{N-M}{n-x}=\frac{M}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1}$$

$$=\frac{M}{\left(\frac{N}{n}\right)\binom{N-1}{n-1}}\binom{N-1}{n-1}=n.\frac{M}{N}=np$$

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد التباين الرياضي

مثال:

مخزن به 80 موتور منها 8 موتورات معيبة سحبت منه عشوائيا عينة من 5 موتورات أوجد احتمال أن تحتوي العينة علي موتور واحد معيب علي الأكثر.

الحل:

من بيانات المثال

$$N=80, M=8, N-M=72, n=5$$

باستخدام التوزيع الهندسي الزائدي

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \frac{\binom{8}{0}\binom{72}{5}}{\binom{80}{5}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{72}{4}}{\binom{80}{5}}$$

مثال:

مجموعة مكونة من 20 شخص منهم 12 رجلا و8 سيدات اختيرت عشوائيا عينة مكونة من 5 أفراد لتكوين لجنه أوجد:

١- احتمال أن تحتوي اللجنه علي 3 رجال وسيدتين

٢- احتمال أن تكون أعضاء اللجنة كلها من نفس الجنس

٣- أعضاء اللجنه كلهم من نفس الجنس

الحل:

من بيانات المثال

$$N = 20, M = 12, N - M = 8, n = 5$$

باستخدام التوزيع الهندسي الزائدي

$$P_X(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, 0 \le k \le n, \quad n \le N$$

١- احتمال أن تحتوي اللجنه علي 3 رجال وسيدتين

$$P_X(3)=\frac{\binom{12}{3}\binom{8}{2}}{\binom{20}{5}}$$

٢- احتمال أن تكون أعضاء اللجنة كلها من نفس الجنس

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$=\frac{\binom{12}{3}\binom{8}{2}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{12}{4}\binom{8}{1}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{12}{5}\binom{8}{0}}{\binom{20}{5}}$$

حل أخر:

$$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]$$

$$=1-\left[\frac{\binom{12}{0}\binom{8}{5}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{12}{1}\binom{8}{4}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{12}{2}\binom{8}{3}}{\binom{20}{5}}\right]$$

٣- أعضاء اللجنه كلهم من نفس الجنس أي أن أعضاء اللجنة كلهم إما أن يكونوا رجالا أو كلهم نساء

$$P_X(0)+P_X(5)=\frac{\binom{12}{0}\binom{8}{5}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{12}{5}\binom{8}{0}}{\binom{20}{5}}$$