احتمالات واحصاء

المحاضرة ٥

الفرقة الثالثه

كيمياء

توزيع بواسون

١-توزيع بواسون

مقدمة:

يعتبر توزيع بواسون من التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الهامة والتي تعبر عن عدد الحوادث النادرة الظهور في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة والفترة الزمنية يمكن أن تكون ثانية – دقيقة – ساعة – يوم – أسبوع – شهر – سنة والمنطقة المحددة يمكن أن تكون صفحة من كتاب – متر مربع من المساحة – متر مكعب من الحجم وهكذا ومن الأمثلة علي توزيع بواسون:

١- عدد حوادث السيارات علي طريق زراعي خلال أسبوع معين

٢- عدد الكرات الحمراء في عينة من الدم

٣- عدد المكالمات الهاتفية التي تصل الي سنترال الجامعة خلال عشرة دقائق

٤- عدد الأخطاء المطبعية في الصفحات المختلفة لكتاب ما

٥- عدد القطع التافة في الانتاج الكلي لسلعة ما

تعريف:

X متغير عشوائي في الفراغ المنفصل يكون له توزيع بواسون بالمعلمة λ إذا كانت له دالة كتلة احتمالية تعطي من خلال العلاقة الرياضية التالية:

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & , \quad x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & , \quad elsewhere \end{cases}$$

حيث λ هي متوسط عدد النجاحات خلال فترة زمنية معينة أو منطقة محددة علما بأن $\lambda = np$.

X متغير عشوائي يمثل عدد النجاحات خلال فترة زمنية أو منطقة محددة.

مثال:

احسب التوقع الرياضي والتباين الرياضي لتوزيع بواسون

الحل:

$$E[X]=\sum_{x} x.P_X(x)$$

$$\therefore E[X]=\sum_{x} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x}\frac{\lambda^{x}}{(x-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

ملاحظة:

من دراستنا السابقة يكون لدينا:

$$e^{\lambda}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}=\ldots$$

$$\because \sigma_X^2(x)=E[X^2]-(E[X])^2$$

$$\therefore E[X^2]=\sum_{x} x^2P_X(x)=\sum_{x} x^2\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$$

x^2 يمكن كتابتها علي الصورة $x^2=x(x-1)+x$

$$\therefore E[X^2]=\sum_{x} x(x-1)\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}+\sum_{x} x\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{x}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{x}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^2+\lambda$$

$$\therefore \sigma_X^2(x) = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

أي أن التوقع الرياضي يساوي التباين الرياضي لتوزيع بواسون $= \lambda$

مثال:

إذا كان احتمال وجود شخص أعسر (يكتب بيده اليسري) في مجتمع ما هو وقد تم اختيار عينة مكونة من 400 شخص عشوائيا من هذا المجتمع أوجد:

١- احتمال وجود 4 أشخاص علي الأقل يكتبون بأيديهم اليسري من العينة المسحوبة

٢- العدد المتوقع من هؤلاء الأشخاص في العينة المسحوبة

الحل:

$$n = 400, p = 0.01 \Rightarrow \lambda = np = 4$$
$$P(X \ge 4) = 1 - P(X < 4)$$
$$= 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-4} 4^x}{x!}$$
$$= 1 - e^{-4}\left[1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6}\right]$$
$$\therefore E[X] = \lambda = 4$$

مثال:

اذا كان متوسط عدد الحوادث الاسبوعية علي احدي الطرق في مدينة ما هو 3 حوادث احسب:

١- احتمال أن يقع في أحد الاسابيع حادثتين علي الأقل

٢- احتمال أن يقع خمسة حوادث في أسبوعين ما علي نفس الطريق

٣- متوسط عدد الحوادث علي ذلك الطريق في سنة ما

الحل:

١- احتمال أن يقع في أحد الاسابيع حادثتين علي الأقل

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$
$$= 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right]$$
$$= 1 - \left[\frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!}\right]$$
$$= 1 - e^{-3}[1 + 3] = 1 - 4e^{-3}$$

علما بأن X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بالمعلمة $\lambda = 3$

٢- احتمال أن يقع خمسة حوادث في أسبوعين ما علي نفس الطريق

يجب أن ننتبه الي الفترة الزمنيه هنا حيث $\lambda = 3$ في الاسبوع أما أسبوعين فتكون $\lambda = 6$

$$P(X = 5) = \frac{e^{-6}6^5}{5!}$$

٣- متوسط عدد الحوادث علي ذلك الطريق في سنة ما

من المعلوم بأن السنه تساوي 52 اسبوع وعليه فان متوسط عدد الحوادث λ علي ذلك الطريق في سنه ما يساوي

$\lambda = 52 \times 3 = 156$ حادثة في السنة

تمارين:

١- X متغير عشوائي له توزيع بواسون بحيث أن $P(X = 1) = P(X = 2)$ فأوجد $P(X = 4)$.

٢- إذا كان معلوما أن احتمال المعاناه من أثار جانبية بعد استخدام أحد الأمصال

هو 0.005 وتم تطعيم 1000 شخص بذلك المصل أوجد:

أ- احتمال واحد علي الأكثر يعاني من الأثار الجانبية

ب- اصابة اثنين فقط بأثار جانبية

٣- بفرض وجود 300 خطأ مطبعي موزع علي كتاب به 500 صفحة أوجد احتمال أن تحتوي صفحة معينة علي خطأين بالضبط – احتمال وجود خطأين علي الأقل

٤- إذا كانت $n \to \infty, p \to 0, \lambda = np$ فهل يمكن تقريب توزيع ذي الحدين الي توزيع بواسون

٢- التوزيع المنتظم المنفصل

من أبسط التوزيعات الاحتمالية المنفصلة حيث أن قيم المتغير العشوائي تأخذ الاحتمال نفسه

تعريف:

إذا كان X متغير عشوائي يأخذ القيم المنفصلة $x_1, x_2, ..., x_n$ فإن X يكون له توزيعا منتظما إذا كانت له دالة كتلة احتمالية علي الصورة:

$$P_X(x,k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & , \quad x = x_1, x_2, ..., x_n \\ \\ 0 & , \quad elsewhere \end{cases}$$

وقد استخدمت الدالة $P_X(x,k)$ بدلا من $P_X(x)$ وذلك للإشارة الي التوزيع المنتظم المنفصل يعتمد علي المعلمة k

مثال:

ألقيت زهرة نرد منتظمة مرة واحدة فأوجدي دالة الكتلة الاحتمالية لظهور الأرقام

الحل:

فضاء العينة لزهرة نرد هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ وذلك باحتمال $\frac{1}{6}$ لكل رقم من فضاء العينة اذن يمكننا الحصول علي توزيع منتظم منفصل بدالة كتلة احتمالية علي الصورة:

$$P_X(x,6) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , \quad x = 1,2,3,4,5,6 \\ \\ 0 & , \quad elsewhere \end{cases}$$