احصاء حيوي

المحاضرة ٦

المستوي الثاني ساعات معتمدة

علوم البحار البيولوجيه

مقدمة في نظرية الاحتمالات

مفهوم الاحتمال:

عند تكرار تجربة ما تحت نفس الظروف لا يعطي بالضرورة نفس النتيجه وهذا معناه أنه لكل تجربة من ذلك النوع مجموعة من النتائج الممكنة وعليه يمكن الأخذ في الاعتبار بعض المفاهيم الأساسية التالية.

١- التجربة العشوائية:

هي تجربة لا تعطي بالضرورة نفس النتيجة عند تكرار اجرائها.

٢- فضاء العينة:

هي مجموعة النتائج الممكنة التي يمكن الحصول عليها عند إجراء تجربة معينة ويرمز لها بالرمز S

٣- الحوادث:

هي مجموعة جزئية من فضاء العينة.

٤- الحادثة البسيطة:

تحتوي علي عنصر واحد من عناصر فضاء العينة.

٥- الحادثة المركبة:

هي التي تحتوي علي عنصرين من عناصر فضاء العينة أو أكثر.

٦- الحادثة المؤكدة:

هي الحادثة التي تظهر دائما عند تكرار إجراء التجربة.

٧- الحادثة العشوائية:

هي الحادثة التي قد تظهر وقد لا تظهر عند تكرار إجراء التجربة.

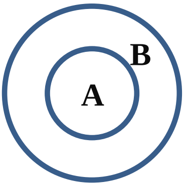
٨- الحادثة المستحيلة:

هي الحادثة التي لا يمكن أن تظهر أبدا عند تكرار اجراء التجربة ويرمز لها بالرمز ϕ.

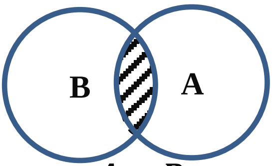
٩- العلاقة بين الحوادث وأشكال فن:

يمكن استخدام أشكال فن لتوضيح العلاقات بين الحادث علي النحو التالي:

أ- **الحادثة الجزئية:** A حادثة جزئية من B تكتب علي الصورة $A \subset B$ ويعبر عنها بالرسم

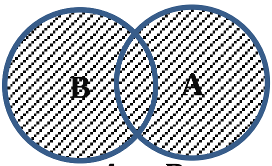


ب- **تقاطع حادثتين:** تقاطع حادثتين A, B يكتب علي الصورة $A \cap B$ ويعبر عنه بالرسم



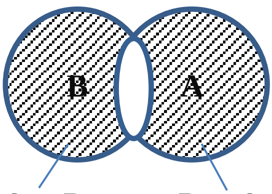
$A \cap B$

ت- **اتحاد حادثتين:** اتحاد حادثتين A, B يكتب علي الصورة $A \cup B$ ويعبر عنه بالرسم



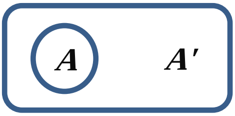
$A \cup B$

ث- **الفرق بين حادثتين:** الفرق بين حادثتين A, B يكتب علي الصورة $A - B$ ويعبر عنه بالرسم

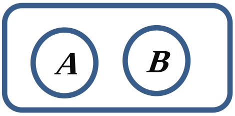


$A - B$ $B - A$

ج- **<u>الحادثة المكملة:</u>** الحادثة المكملة لأي حادثة A يرمز لها بالرمز A' ويعبر عنها بالرسم كما بالشكل وهذا معناه $\forall x \in A \Rightarrow x \notin A'$ والعكس



ح- **<u>الحوادث المتنافية:</u>** الحادثتين A, B تكونان متنافيان إذا كان من المستحيل حدوثهما معا أي أن: $A \cap B = \phi$ ويعبر عنها بالرسم



مفهوم احتمال حادثة عشوائية A:

هو مقياس لفرصة ظهور الحادثة A ويرمز له بالرمز $P(A)$ ويعرف بالعلاقة الرياضية التالية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

حيث:

$n(A)$ تمثل عدد عناصر A

$n(S)$ تمثل عدد عناصر فضاء العينة S

مسلمات الاحتمال:

١- $0 \le P(A) \le 1$ لكل $A \in S$

٢- $P(S) = 1$

٣- بفرض أن لدينا مجموعة من الحوادث المتنافية

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \quad (A_i \cap A_j = \phi \qquad \forall i \neq j)$$

$$\therefore P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

مثال:

ألقيت عملة معدنية مرة واحد أوجد فضاء العينة ثم احسب احتمال ظهور كلا من الصورة والكتابة.

الحل:

برمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T

فضاء العينة هو:

$$S = \{H, T\} \Rightarrow n(S) = 2$$
$$n(T) = n(H) = 1$$
$$P(T) = P(H) = \frac{1}{2}$$

مثال:

القيت عملة معدنية مرتين فأوجد فضاء العينة ثم احسب احتمال ظهور صورتين – احتمال ظهور صورة مرة واحدة علي الأقل.

الحل:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \Rightarrow n(S) = 4$$
$$P(HH) = \frac{1}{4}$$
$$P\{HT, TH, TT\} = \frac{3}{4}$$

حل أخر:

بفرض أن A عباره عن حادثة عشوائية تمثل ظهور صورة مرتين:-

$$\therefore A=\{HH\} \Rightarrow n(A)=1$$

$$\therefore P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{4}$$

بفرض أن B عباره عن حادثة عشوائية تمثل ظهور صورة مرة واحدة علي الأقل:-

$$\therefore B=\{HT,TH,TT\} \Rightarrow n(B)=3$$

$$\therefore P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{4}$$

مثال:

القيت عملة معدنية n من المرات أوجد عدد عناصر فضاء العينة

الحل:

حيث أن أساس العملة المعدنية هي الصورة أو الكتابة أي أن أساس العملة هو 2

$$\therefore n(S)=2^n, n \geq 1$$

حيث n عدد مرات إلقاء العملة المعدنية.

مثال:

القي حجر نرد مرة واحدة (زهرة الطاولة) أوجد فضاء العينة.

الحل:

حيث أن أوجه حجر النرد تحمل الأرقام 1,2,3,4,5,6

$$\therefore S=\{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n(S)=6$$

مثال:

القي حجر نرد مرتين أوجد فضاء العينة – احسب احتمال أن يكون مجموع الأوجه أقل من أو يساوي 7 – احتمال أن يكون مجموع الأوجه أكبر من 10

الحل:

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

$$n(S)=36$$

بفرض أن A عباره عن حادثة عشوائية تمثل أن مجموع الأوجه أقل من أو يساوي 7 :-

$$\therefore A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2)$$
$$,(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(6,1)\}$$

$$\therefore n(A)=21 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

بفرض أن B عباره عن حادثة عشوائية تمثل أن مجموع الأوجه أكبر من 10:-

$$\therefore B=\{(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

$$\therefore n(B)=3 \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

مثال:

القي حجر نرد n من المرات – احسب عدد عناصر فضاء العينة

الحل:

n عدد مرات إلقاء حجر نرد.

$$\therefore n(S) = 6^n, n \geq 1$$

بعض الخواص الاضافية للاحتمال:

1- $P(\phi) = 0$

2- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad \forall A, B \in S$

3- $P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \qquad \forall A, B \in S$

4- $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \qquad \forall A, B \in S$

5- If $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \qquad \forall A, B \in S$

6- $P(A) + (A') = 1$

الاثبات:

$$\because P(S) = 1 \Rightarrow P(S') = 0$$
$$\because S' = \phi \Rightarrow P(\phi) = 0$$

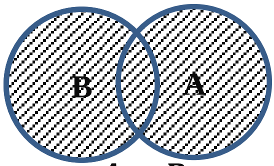
حل أخر

$$\because S \cup \phi = S \Rightarrow P(S \cup \phi) = P(S)$$
$$\because S \cap \phi = \phi \Rightarrow P(S \cup \phi) = P(S) + P(\phi)$$
$$\therefore P(S) + P(\phi) = P(S) \Rightarrow 1 + P(\phi) = 1$$
$$\Rightarrow P(\phi) = 0$$

٢- $A \cup B$ يمكن أن يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$A \cup B = A \cup (B - A) \qquad (1)$$
$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) \qquad (2)$$
$$\because A \cap (B - A) = \phi \qquad (3)$$
$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \qquad (4)$$

الحادثة B يمكن أن يعبر عنها في الصورة التالية:



$A \cup B$

$$B = (A \cap B) \cup (B - A) \qquad (5)$$
$$P(B) = P\{(A \cap B) \cup (B - A)\} \qquad (6)$$
$$\because (A \cap B) \cap (B - A) = \phi \qquad (7)$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \qquad (8)$$

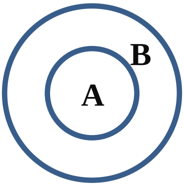
$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \qquad (9)$$

بالتعويض من المعادلة (9) في المعادلة (4) ينتج المطلوب

اثبات (٣) هي الخطوات السابقة في اثبات (٢) من الخطوة (٥) الي الخطوة (٩)

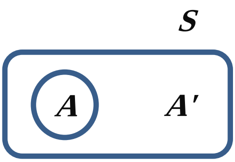
اثبات (٤) هي الخطوات السابقة في اثبات (٢) من الخطوة (٥) الي الخطوة (٩) مع استبدال A ب B وكل B ب A

٥- الحادثة العشوائية B يمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية:



$$B=A\cup(B-A)$$
$$\therefore P(B)=P\{A\cup(B-A)\}$$
$$\because A\cap(B-A)=\phi$$
$$\therefore P(B)=P(A)+P(B-A)$$
$$\because 0\le P(B-A)\le 1\Rightarrow P(A)\le P(B)$$

٦-



$$\because A\cup A'=S$$
$$\because A\cap A'=\phi$$
$$\therefore P(A\cup A')=P(S)$$
$$P(A)+P(A')=1$$

مثال:

اذا كان احتمال نجاح محمد في الامتحان النهائي في مقرر علم الاجتماع هو $\frac{1}{3}$ واحتمال نجاح محمد وأحمد في نفس المقرر هو $\frac{1}{4}$ فما هو احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد.

الحل:

نرمز لنجاح محمد بالرمز A ولنجاح أحمد بالرمز B

$$P(A)=\frac{1}{3},P(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

مثال:

يتسابق ثلاث فرسان فإذا كان احتمال سرعة الأول ضعف الثاني واحتمال سرعة الثاني ضعف الثالث فما و احتمال سرعة كل منهم.

الحل:

نفرض أن احتمال سرعة الفارس الثالث هي A

احتمال سرعة الفارس الثاني هي $2A$

احتمال سرعة الفارس الأول هي $4A$

$$\therefore A+2A+4A=1\Rightarrow 7A=1\Rightarrow A=\frac{1}{7}$$

$\therefore$ احتمال سرعة الفارس الأول هي $\frac{4}{7}$ واحتمال سرعة الفارس الثاني هي $\frac{2}{7}$

واحتمال سرعة الفارس الثالث هي $\frac{1}{7}$.

مثال:

اذا كان احتمال نجاح عمر في مقرر النبات هو $\frac{1}{3}$ واحتمال نجاح عمر وخالد في نفس المقرر هو $\frac{1}{4}$ واحتمال نجاح أحدهما علي الأقل هو $\frac{1}{6}$ فما هو احتمال نجاح خالد في ذلك المقرر.

الحل:

نرمز لنجاح عمر بالرمز A ولنجاح خالد بالرمز B

$$P(A)=\frac{1}{3}, P(A\cap B)=\frac{1}{4}, P(A\cup B)=\frac{1}{6}$$
$$\because P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\therefore P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)$$
$$\therefore P(B)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

تمرين:

بين وجه الخطأ في كل من العبارات التالية:

١- احتمال أن ينجح محمد في مقرر الفيزياء هو 0.95-

٢- احتمال أن ينجح محمد في مقرر الاحصاء هو 0.9 واحتمال ألا ينجح هو 0.15

٣- احتمال أن ينجح محمد في مقرر الاحصاء هو 0.9 واحتمال أن ينجح في مقرري الاحصاء والجبر هو 0.95

٤- احتمال أن يفوز الفريق الوطني لكرة القدم في مباراته القادمة هو 0.75واحتمال أن يتعادل 0.09 واحتمال أن يفوز أو يتعادل هو 0.95

٥- احتمال سقوط مطر في يوم معين هو 0.6 واحتمال وجود رياح نشطه هو 0.8 واحتمال سقوط المطر ووجود رياح نشطه هو 0.85

٦- احتمال أن تستقبل عياده طبيب أقل من 5 مراجعين في فترة ما قبل الظهر هو 0.62 واحتمال أن تستقبل 5 مراجعين أو أكثر هو 0.25

٧- $P(A)=1.02$

٨- $P(A)=0.48, P(A')=0.42$

٩- $P(A)=0.87, P(A\cup B)=0.79$

١٠- $P(A)=0.45, P(A\cap B)=0.53$

المبادئ الأساسية للتحليل التوافقي

١- الأزواج المرتبة:

إذا كان لدينا m من العناصر $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ و n من عناصر أخري علي الصورة $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ فإنه من الممكن تكوين عدد قدره $m \times n$ من الأزواج المرتبه علي الصورة:

$$(a_i, b_j), (i = 1,2,..., m, \ j = 1,2,..., n)$$

وإذا كان لدينا عمليه ما تتم خلال ثلاث مراحل (مثلا) بحيث أن المرحلة الأولي تتم بعدد قدره m من الطرق المختلفة والمرحلة الثانية تتم بعدد قدره n من الطرق المختلفة والمرحلة الثالثة تتم بعدد قدره l من الطرق المختلفة فإن العملية ككل تتم بعدد قدره $m \times n \times l$ من الطرق المختلفة.

٢- العينات المرتبة:

الغرض منها هو حساب عدد الطرق التي يمكن بها سحب عينات مرتبه حجمها r من مجموعة من العناصر التي عددها n وتتم عمليه السحب باحدي الطريقتين:

أ- سحب العينة بإرجاع:

في هذه الطريقة يعاد كل عنصر بعد سحبه وتسجيل قراءته وبذلك يظل عدد العناصر في n ثابتا في كل مرة تتم فيها السحب وعليه يمكن سحب العنصر الأول بعدد n من الطرق المختلفة وكذلك العنصر الثاني بعدد n من الطرق المختلفة وهكذا حتي العنصر الأخير رقم r بعدد قدره n من الطرق المختلفة وبذلك يكون عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها سحب العينة ككل هو

$$\underbrace{n.n.n.n....n}_{r} = n^r$$

ب- سحب العينة بدون إرجاع:

في هذه الطريقة لا يعاد العنصر المسحوب ثانيه وبذلك يتناقص عدد العناصر في كل مرة يتم فيها السحب يمكن سحب العنصر الأول بعدد n من الطرق المختلفة و العنصر الثاني بعدد $n-1$ من الطرق المختلفة وهكذا حتي العنصر الأخير رقم r بعدد قدره $n-r+1$ من الطرق المختلفة وبذلك يكون عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها سحب العينة ككل هو

$$n(n-1)(n-2)...(n-r+1)=P_r^n$$

حيث P_r^n هي التباديل وهي تحقق الخواص التالية:

1- $P_r^n = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

2- $P_n^n = n!$

3- $P_0^n = 1$

4- $P_{n+1}^n = 0$

٣- الترتيب:

عدد الطرق المختلفة التي يتم بها ترتيب n من العناصر المختلفة هو

$$n(n-1)(n-2)...3.2.1=n!$$

٤- في حالة العينات غير المرتبة:

عدد الطرق المختلفة التي يتم بها سحب عينة حجمها r من n من العناصر بصرف النظر عن ترتيب العناصر داخل العينة هو:

$$C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث C_r^n هي التوافيق وهي تحقق الخواص التالية:

1- $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

2- $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

3- $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

4- $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1} \quad ,1\le r\le n$

مثال:

كم عدد الطرق الممكنة لاختيار مقررين الأول بقسم الرياضيات والثاني بقسم الدراسات اذا كان يوجد بقسم الرياضيات 5 مقررات تناسب هذا الطالب وبقسم الدراسات 3 مقررات تناسبه أيضا.

الحل:

عدد الطرق المختلفة لاختيار الطالب مقرر الرياضيات = 5 طرق

عدد الطرق المختلفة لاختيار الطالب مقرر الدراسات = 3 طرق

عدد الطرق المختلفة لاختيار الطالب مقررين هي

$5\times3=15$ طريقة

مثال:

ذهب محمد لشراء سيارة من أحد المعارض فوجد فيه 4 موديلات مختلفة لها 3 أنواع مختلفة من المحركات ولها 12 لونا فما هو عدد الطرق المختلفة لكي يختار محمد سيارة من حيث الموديل والمحرك واللون.

الحل:

عدد طرق اختيار الموديل = 4 طرق

عدد طرق اختيار المحرك = 3 طرق

عدد طرق اختيار اللون = 12 طريقة

$\therefore$ عدد طرق اختيار محمد لواحدة من السيارات بالمعرض هي:

طريقة $4\times3\times12=144$

مثال:

صندوق به 10 كرات سحبت منه كرتان مع الارجاع فما هو عدد الطرق المختلفة لسحب هاتين الكرتين.

الحل:

مثال:

ما هو عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها تكوين بعثة مكونة من 3 رجال وامراتين من بين 6 رجال و 5 نساء.

الحل:

$$n=10, r=2$$

عدد الطرق المختلفة لسحب هاتين الكرتين هي

$$n^r=10^2=100$$

مثال:

صندوق به 5 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء سحبت منه كرتان احسب احتمال أن تكون الكرتان:

أ- حمراء

ب- كرة بيضاء وأخري حمراء

ت- الكرتان لهما نفس اللون

الحل:

نرمز للكرة الحمراء بالرمز R والكرة البيضاء بالرمز W

$$S=\{RR,RW,WR,WW\}$$

أولا إذا كان السحب بدون إرجاع:

$$P(RR)=\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{6}$$

$$P(RW)+P(WR)=\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right)=\frac{5}{9}$$

$$P(RR)+P(WW)=\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right)=\frac{4}{9}$$

ثانيا إذا كان السحب بإرجاع:

$$P(RR)=\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{16}{81}$$

$$P(RW)+P(WR)=\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{40}{81}$$

$$P(RR)+P(WW)=\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{41}{81}$$

مثال:

بكم طريقة يمكن أن يجلس ثلاثة أشخاص علي ثلاثة مقاعد في صف واحد.

الحل:

عدد طرق جلوس الأشخاص الثلاثة = 3!=3.2.1=6 طرق

مثال:

بكم طريقة يمكن اختيار كرتين بدزن ارجاع من صندوق يحتوي علي 15 كرة.

الحل:

عدد الطرق هو

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

بالنسبة للمثال

$$n = 15, r = 2$$

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!.13!} = 105$$ طريقة