المحاضرة الأولى

البندول المركب:

إذا وقع مركز الثقل رأسياً تحت محور التعليق O فإن الجسم يكون في حالة سكون، أما إذا أزيح إزاحة صغيرة θ عن الوضع الرأسي فإن الجسم يتذبذب.

فإذا كانت M هي كتلة الجسم، h هي المسافة بين محور التعليق ومركز الثقل، g عجلة الجاذبية الأرضية فإن عزم الازدواج:

$$C = Mgh\sin\theta = Mgh\theta$$

على اعتبار أن θ إزاحة صغيرة بحيث يكون:

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$$

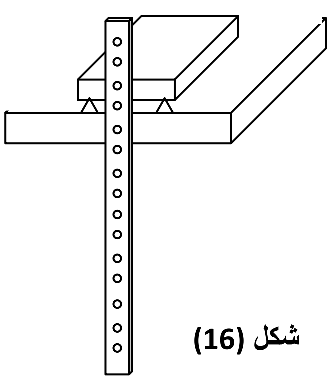
$$\therefore\ I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\theta$$

وهذه تمثل حركة توافقية بسيطة ويكون زمن الذبذبة الواحدة:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Mgh}} \qquad (18)$$

حيث I_O هو عزم القصور الذاتي للجسم حول محور الدوران O ، فإذا كان I_C هو عزم القصور الذاتي للجسم حول محور يوازي المحور السابق ويمر بمركز الثقل:

$$\therefore\ I_O = I_C + Mh^2$$



شكل (16)

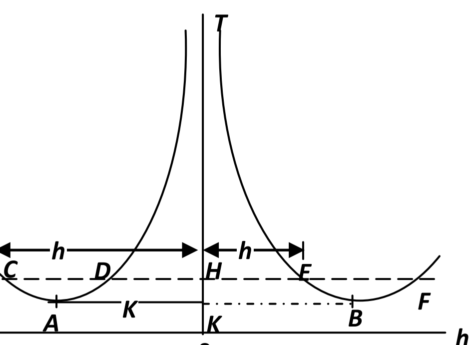
$$= MK^2 + Mh^2$$

حيث K هو نصف قطر القصور للجسم حول محور يمر بمركز الثقل وموازياً لمحور الدوران، وبالتعويض في المعادلة (18):

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + h^2}{hg}}$$

ومنها يمكن إيجاد عجلة الجاذبية الأرضية g ونصف قطر القصور K عملياً كالآتي:

نأتي بقضيب طوله حوالي متر وله عدة ثقوب على أبعاد متساوية (حوالي ٢سم). يعلق القضيب من أحد الثقوب حول محور أفقي (شكل 15) ونتركه يتذبذب بحيث تكون زاوية الإزاحة صغيرة ويحسب زمن الذبذبة الواحدة τ بمعرفة زمن ذبذبة 50 ذبذبة. تقاس المسافة h بين محور التعليق ومركز الثقل. وتكرر التجربة بتعليق القضيب من ثقل آخر وهكذا. نرسم العلاقة بين (شكل 16) ومنه يتضح أن:



شكل (17)

(١) للعلاقة جزئين متماثلين تماماً كل لأحد شطري القضيب على جانبي مركز الثقل.

(٢) يتضح من الشكل البياني أن أقل زمن ذبذبة للبندول يأتي لو علق من النقطتين اللتين يمثلهما A, B واللتين على بعدين متساويين h_0 من مركز الثقل، وبتفاضل

المعادلة (19) بالنسبة إلى h ووضع الناتج يساوي صفر، نجد أن:

$$h = K$$

وبالتعويض في المعادلة (19) نجد أن أقل زمن ذبذبة للبندول هو:

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2K}{g}}$$

وهذا يعني أن البندول يعمل في هذه الحالة كبندول بسيط طوله $2K$.

(٣) من المعادلة (19)

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{K^2}{h}+h}{g}}$$

وهذه معادلة البندول البسيط الذي طوله = $h + \frac{K^2}{h}$

ويسمى بالبندول البسيط المكافئ simple equivalent pendulum والذي يعطي نفس زمن ذبذبة البندول المركب.

(٤) يمكن كتابة المعادلة (19) على الوجه الآتي:

$$\tau^2 = 4\pi^2\left(\frac{K^2+h^2}{hg}\right)$$

$$\therefore\ h^2 - \frac{g\tau^2}{4\pi^2}h + K^2 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في h. أي أن البندول المركب يوجد طولين مختلفين يعطيان نفس زمن الذبذبة. فإذا كان جذري المعادلة هما h_1, h_2

$$h_1 h_2 = K^2 \qquad (20)$$

ومنها يمكن تعيين K وذلك برسم خط موازي لمحور h مثل $CDHEF$ نجد أن $CH = h_1$، $HE = DH = h_2$ كما يمكن تعيين K عند أقل زمن ذبذبة، فنجد أن $\Delta K = K$.٠

(٥) من المعادلة (19) نجد أن:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{(K-h)^2 + 2Kh}{gh}}$$

ومنها نجد أن τ تكون أقل ما يمكن إذا كان:

$$(K-h)^2 = 0$$

$$K = h$$

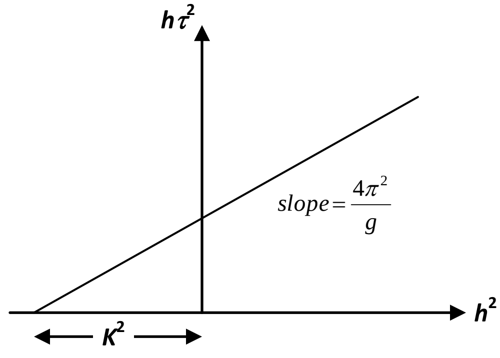
أي إذا كان:

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2K}{g}}$$

وقد أثبتنا ذلك بالتفاضل.

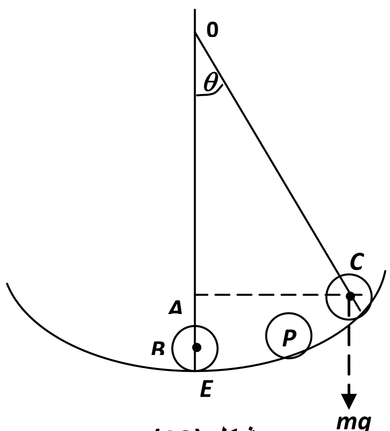
(٦) يمكن كتابة المعادلة (19) على الوجه الآتي:

$$.h\tau^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(h^2 + K^2\right)$$



فإذا رسمنا العلاقة بين $h^2, h\tau^2$ نجدها خط مستقيم (شكل 17) يقطع محور h^2 في جزء يعطي K^2. أما ميل الخط فهو $\frac{4\pi^2}{g}$ ومنه يمكن إيجاد عجلة الجاذبية الأرضية g.

١٧- إيجاد عجلة الجاذبية الأرضية بطريقة تدحرج كرة صغيرة فوق مرآة مقعرة:



شكل (19)

توضع المرآة المقعرة أفقياً فتحتها إلى أعلى بحيث يمكن أن تتدحرج فوقها كرة صغيرة من الصلب وتتذبذب في مستوى رأسي بأسفل نقطة. ثم يحسب زمن الذبذبة τ. فإذا كانت R هي نصف قطر تكور المرآة (الوجه الذي تتدحرج فوقه الكرة) ويمكن قياس ذلك بأسفيرومتر، m كتلة الكرة المعدنية.

r نصف قطرها، g عجلة الجاذبية الأرضية فإنه في حالة إذا كانت الإزاحة BC صغيرة بالنسبة إلى R وإذا وضعت الكرة عند C ثم تركت تتدحرج فإن:

طاقة الوضع للكرة عند C = $mg.\overline{AB}$

ولكن:

$$AB = OB - OA = (R - r) - (R - r)\cos\theta$$

$$= (R - r)(1 - \cos\theta)$$

$\therefore$

طاقة الوضع $= (R-r)2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).mg$

$$= 2(R-r)\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 mg = \frac{1}{2}(R-r)mg\theta^2$$

لأن θ صغيرة

$$\theta = \sin\theta$$

من الشكل يتبين أن مركز الثقل يتحرك في جزء من دائرة *BC*، أي أن:

$$\frac{BC}{R-r} = \theta$$

طاقة الوضع عند النقطة *C*

$$= \frac{1}{2}(R-r)\frac{\overline{BC}^2}{(R-r)^2}mg$$

$$= \frac{1}{2}\frac{mg}{(R-r)}\overline{BC}^2$$

ليس للكرة طاقة حركة عند النقطة *C* ولكن لها طاقة حركة عند النقطة *B*.

$$= \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega_m^2$$

حيث v_m هي السرعة الخطية العظمى لمركز ثقل الكرة، ω_m السرعة الزاوية العظمى للدوران، I عزم القصور الذاتي للكرة حول محور ما بمركز ثقلها وعمودياً على مستوى الرسم.

$\therefore$ طاقة الحركة عند B

$$=\frac{1}{2}mv_m^2+\frac{1}{2}I\,\frac{v_m^2}{r^2}$$

وعند أي نقطة متوسطة P تبعد x عن B على قوس الحركة فإن:

طاقة الوضع + طاقة الحركة = ثابت

$$\therefore\ \frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{I}{r^2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}mg\frac{x^2}{(R-r)}=\text{const.}$$

حيث $\dot{x}$ هي السرعة عند النقطة P في اتجاه القوس. وبالتفاضل:

$$\therefore\ \ m\dot{x}\ddot{x}+\frac{I}{r^2}\dot{x}\ddot{x}+\frac{mg}{(R-r)}x\dot{x}=0$$

بالقسمة على $\dot{x}$ نجد أن:

$$\ddot{x}=-\frac{mg}{(R-r)\left(m+\frac{I}{r^2}\right)}x$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري:

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{mg}{(R-r)\left(m+\dfrac{I}{r^2}\right)}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)\left(m+\dfrac{I}{r^2}\right)}{mg}}$$

ولكن:

$$I = \frac{5}{2}mr^2$$

$$\therefore\ \tau = 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)\dfrac{7}{5}}{g}} \qquad (20)$$

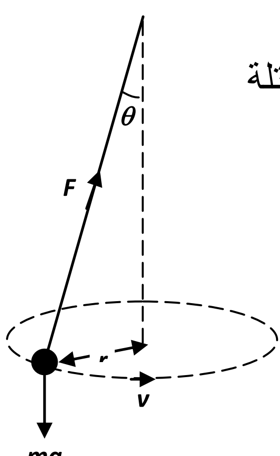
ومن هذه المعادلة يمكن تعيين *g*. ولا تعتبر هذه الطريقة من الطرق الدقيقة في قياس عجلة الجاذبية الأرضية.

١٨- البندول المخروطي:

إذا تحرك البندول البسيط على شكل مخروط بحيث تتحرك الكتلة *m* المعلقة في دائرة أفقية نصف قطرها *r* (شكل 19) فإن:

$$r = l \sin\theta$$

وإذا كانت *v* هي السرعة المنتظمة للكتلة فإن:



شكل (20)

القوة الطاردة المركزية = $\frac{mv^2}{r}$ في الاتجاه الأفقي، وإذا كانت F هي الشد في الخيط فإن:

مركبة قوة الشد في الاتجاه الأفقي = $F \sin\theta$ في حالة الاتزان الأفقي:

$$F \sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

وفي حالة الاتزان الرأسي:

$$F \cos\theta = mg$$

وبقسمة المعادلتين:

$$\therefore \ \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\therefore \ v = \sqrt{gr\tan\theta} = \sin\theta\sqrt{\frac{gl}{\cos\theta}}$$

ولكن زمن الذبذبة:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\frac{l\sin\theta}{\sin\theta\sqrt{\frac{gl}{\cos\theta}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$