المحاضرة الثانية

الباب الثالث

المرونة (Elasticity)

الأجسام المرنة:

١- عند التأثير على الأجسام الصلبة فيكون هناك نوعين من التغير:

التغير المرن Elastic Deformation

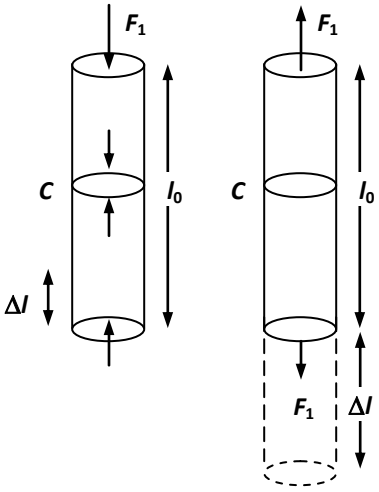
والتغير غير المرن Plastic Deformation

وببساطة فالتغير المرن هو الذي يزول بزوال المؤثر الخارجي والتغير غير المرن هو التغير الذي يظل في الجسم بعد زوال المؤثر الخارجي، وسوف ندرس هنا فقط التغير المرن في الأجسام.

أنواع التحميل:

١- تحميل طولي (شد أوضغط):

نعتبر قضيب معدني طوله l_0 ومساحة مقطعه s ونؤثر عليه بقوة F (قوة شد أو قوة ضغط) كما في الرسم (1, a) أو (1, b) فنجد أن القضيب يستطيل أو ينكمش.



(b) (a)

شكل (1)

بمعنى أن كل جزء من جزئي القضيب يشد أو يضغط على الجزء الآخر بنفس القوة ولذلك فإن كل منهما يستطيل أو ينكمش وهذه القوة تؤثر على أي مقطع من مقاطع القضيب

سواء في حالة الاستطالة أو الانكماش. القوة المؤثرة على وحدة المساحات من المقطع العمودي تعرف **بالإجهاد**، فإذا كان القضيب يستطيل سميت هذه القوة بإجهاد الشد

$$T = \frac{F}{s} \qquad (1)$$

حيث s مساحة المقطع العمودي للقضيب، والقوة F تؤثر في اتجاه محور القضيب.

أما إذا كان القضيب ينكمش فإن الإجهاد يسمى في هذه الحالة ضغطاً P ويصبح الطول

$$l = l_0 \pm \Delta l$$

النسبة بين التغير في الطول Δl إلى الطول الأصلي l_0 هي:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \qquad (2)$$

يسمى ε بالتغير النسبي في الطول أو **الانفعال** strain وهي كمية موجبة في حالة الاستطالة وسالبة في حالة الانكماش.

ولقد أثبتت التجارب أن الانفعال يتناسب مع الإجهاد المقابل له وذلك في حالتي الشد والضغط طالما كان الإجهاد أقل من حد معين يعرف بحد المرونة

$$T = E.\frac{\Delta l}{l_0}, \qquad P = -E.\frac{\Delta l}{l_0} \qquad (3)$$

حيث E ثابت يعتمد على مادة القضيب وخواصه الفيزيائية ويعرف بمعامل ينج Young's modulus

العلاقة السابقة تعبر عن قانون هوك Hook's Law للقضبان في حالتي الشد والضغط وهو قانون تقريبي.

الشغل المبذول أثناء الانفعال:

من البديهي أنه لكي يحدث زيادة (استطالة) في طول قضيب معين من مادة ما فيجب أن يكون هناك شغلاً خارجياً يبذلة القضيب بواسطة القوة الخارجية وهذه القوة إما أن تكون قوة شد في اتجاه طوله. كذلك لكي يحدث نقص (انكماش) في طول هذا القضيب فإن القوة الخارجية المؤثر عليه يجب أن تكون قوة ضغط.

الشغل المبذول بالقوة الخارجية يختزن في القضيب كطاقة وضع بشرط أن لا يفقد أي جزء من هذا الشغل في رفع درجة حرارة مادة القضيب، أي يشترط أن لا يتحول أي جزء من هذا الشغل إلى طاقة حركة.

عند وقف تأثير القوة الخارجية فإن القضيب نفسه يبذل شغلاً لكي يعود إلى وضعه الأصلي وهذا الشغل يكون مساوياً لطاقة الوضع المختزنة به ويسمى هذا الشغل أو تلك الطاقة **بطاقة المرونة** لهذا القضيب وبذلك يمكن تعريف **طاقة المرونة** لجسم ما بأنها الشغل المبذول عليه بواسطة القوى الخارجية بشرط أن يستهلك هذا الشغل في عملية التمدد أو الانكماش فقط ويتحول كلية إلى طاقة وضع تختزن بالجسم ولا يتحول أي جزء منها إلى طاقة حركة، أي لا يحدث تغير في درجة حرارة الجسم، ولضمان ذلك يجب أن يتم التمدد أو الانكماش ببطء شديد وذلك بأن تبدأ القوة الخارجية من الصفر وتزداد بالتدرج وببطء بحيث يبدو أي مقطع في القضيب في أي لحظة وكأنه في حالة اتزان.

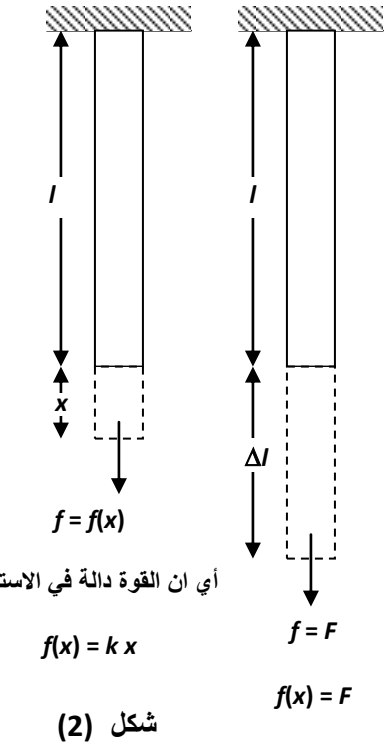
لحساب طاقة المرونة لسلك (قضيب) من مادة معينة واقع تحت تأثير قوة خارجية، نعتبر أن الطول الأصلي للسلك هو l ومساحة مقطعه s وأن القوة الخارجية المؤثرة عليه تكون دالة في الاستطالة x الحادثة في السلك نتيجة لتأثير هذه القوة، أي أن:

$$f = f(x)$$

هذه القوة تبدأ من الصفر $f = 0$ وذلك عندما تكون الاستطالة $x = 0$ وتزداد القوة بالتدريج وببطء حتى تصل إلى قيمتها العظمى $f = F$ وتبعاً لذلك تكون الاستطالة بالتدريج حتى تصل قيمتها العظمى $x = \Delta L$ ، انظر الشكل.

تبعاً لقانون هوك للمرونة (القوة المؤثر على السلك تتناسب مع التغير في طوله الناتج عن تأثير هذه القوة) يكون:

$$f(x) = k\,x \qquad (1)$$



شكل (2)

حيث k يعرف بثابت القوة للمادة وهو القوة التي تؤثر على السلك وتحدث به استطالة قيمتها الوحدة، وله علاقة مباشرة بمعامل ينج E حيث:

$$E = \frac{\frac{f(x)}{s}}{\frac{x}{l}}$$

$$\therefore \ f(x) = \left(E.\frac{s}{l} \right) x = k\, x$$

$$\therefore \ k = E.\frac{s}{l}$$

والشغل المبذول بالقوة $f(x)$ لكي تنتج إستطالة قدرها dx في طول القضيب يتحول إلى زيادة في طاقة الوضع بمقدار

$$dU = f(x)dx$$

والشغل المبذول لكي تزداد الاستطالة من $x = 0$ إلى $x = \Delta L$ يتحول إلى زيادة في طاقة الوضع بمقدار

$$U = \int du = \int_{x=0}^{x=\Delta L} f(x)dx$$

$$= \int_0^{\Delta L} (k\, x)dx$$

$$= k \int_0^{\Delta L} x\, dx$$

$$= k\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\Delta L}$$

$$= \frac{1}{2} k.(\Delta L)^2 \qquad (2)$$

وحيث أن الاستطالة تصل إلى أقصى قيمة لها ΔL عندما تصل القوة $f(x)$ إلى أقصى قيمة لها F حيث:

$$F = k(\Delta L)$$

بالتعويض في (2) نجد أن:

$$U = \frac{1}{2}(k\,\Delta L)\Delta L = \frac{1}{2}F.\Delta L \qquad (3)$$

أي أن طاقة المرونة للسلك = $\frac{1}{2}$ القوة المؤثر على السلك (شد أو ضغط) × قيمة التغير الحادث في السلك (استطالة أو انكماش).

الزيادة الحجمية لطاقة المرونة أي طاقة المرونة لوحدة الحجوم من السلك الواقع تحت تأثير نحصل عليها بقسمة طرفي العلاقة (3) على حجم السلك $V = sL$ ونحصل على:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{F.\Delta l}{s.l}$$

$$= \frac{1}{2}T.\varepsilon$$

حيث $T = \frac{F}{s}$ = الإجهاد، $\varepsilon = \frac{\Delta L}{l}$ = الإنفعال

أي أن كثافة طاقة المرونة = الإجهاد المؤثر × الانفعال الناتج

$$u = \frac{1}{2}\text{stress} \times \text{strain} \qquad (4)$$

$$U = u \times \text{volume}$$

$$= \frac{1}{2}\text{stress} \times \text{strain} \times \text{volume} \qquad (5)$$

يلاحظ أنه عند التأثير على السلك بقوة ثابتة F وحدثت فيه استطالة قدرها ΔL فإن الشغل المبذول في هذه الحالة يكون:

$$W = F \,.\, \Delta L \qquad (6)$$

ومن العلاقتين (6) ,(3) يتضح أن نصف قيمة الشغل W فقط يتحول إلى طاقة المرونة U أما النصف الآخر فيستهلك في صورة طاقة حركة للاهتزازات المرنة Elastic vibrations التي تتولد دائماً في السلك (الجسم) عند التأثير الفجائي عليه بقوة خارجية، لكن عند التأثير البطيء فإن هذه الاهتزازات لا تنشأ أصلاً وهذا يفسر سبب وجود المعامل $\frac{1}{2}$ في العلاقتين.

نسبة بواسون ***Poisson's ratio***

ثبت بالتجربة أنه عند التأثير على جسم ما بقوة F في اتجاه طول الجسم وسواء كانت هذه القوة قوة شد أو ضغط فإن التغير الحادث في الجسم لا يكون مقتصراً فقط على طوله ولكن يحدث تغير أيضاً في العرض.

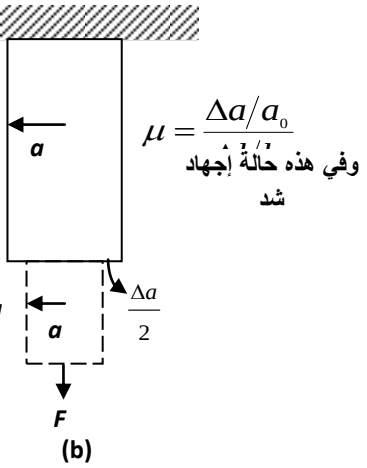
نعتبر قضيباً طوله l_0 وعرضه a_0 وذلك قبل التأثير عليه بأية قوة خارجية. بعد التأثير على القضيب بقوة F يصبح طوله:

$$l = l_0 \pm \Delta l$$

ويصبح العرض (أو القطر في حالة القضيب الأسطواني):

$$a = a_0 \mp \Delta a$$

حيث الإشارة العلوية أمام كل من $\Delta a,\ \Delta l$ في العلاقتين السابقتين تشير إلى أن القوة المؤثرة على القضيب هي قوة شد، والإشارة السفلية تشير إلى أن القوة المؤثرة قوة ضغط.



التغير النسبي في الطول (الانفعال الطولي) في حالة الشد (شكل 3هو: $\frac{\Delta l}{l_0}$) و الانفعال المستعرض (في الاتجاه العمودي على خط عمل قوة الشد) هو: $-\frac{\Delta a}{a_0}$

$$-\frac{\Delta a}{a_0} \approx -\frac{\Delta a}{a}$$

النسبة بين الانفعال المستعرض إلى الانفعال الطولي تعرف بنسبة بواسون ويرمز لها بالرمز

$$\mu = -\frac{\Delta a}{a_0} : \frac{\Delta l}{l_0}$$

تتوقف نسبة بواسون فقط على نوع مادة القضيب وتعتبر من أهم ثوابت المرونة.