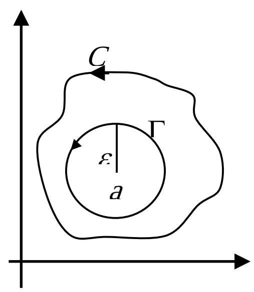
صيغ تكامل كوشي:

نظرية (١):

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على الحد C لمنطقة ما بسيطة الترابط R وبداخله، برهن صيغة تكامل كوشي.

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$



البرهان:

الدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلية على المنحنى C وداخله ما عدا عند النقطة $z=a$ (أنظر شكل ٥-١)

من نظرية (٢) يكون لدينا

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad (1)$$

حيث يمكن أن نختار دائرة ما Γ نصف قطرها ε ومركزها النقطة a وبالتالي معادلة Γ هي:

$$|z-a|=\varepsilon$$

أو

$$z-a=\varepsilon e^{i\theta}$$

حيث $0\le\theta\le 2\pi$

بالتعويض بالمقدار $z=a+\varepsilon e^{i\theta}$، $dz=i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$

فإن التكامل في الطرف الأيمن للمعادلة (1) يصبح

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz=\int_0^{2\pi}\frac{f\left(a+\varepsilon e^{i\theta}\right)}{\varepsilon e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi} f\left(a+\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta$$

من معادلة (1) يكون لدينا

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz=i\int_0^{2\pi} f\left(a+\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta \qquad (2)$$

بأخذ النهايات للمعادلة (2) مع الأخذ في الاعتبار أن $f(z)$ متصلة فإن

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \lim_{\varepsilon \to 0} i \int_0^{2\pi} f\left(a+\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} f\left(a+\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} f(a)d\theta = 2\pi i f(a)$$

وبالتالي

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

كما هو المطلوب.

نظرية (٢):

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على الحد C لمنطقة ما بسيطة الترابط R وداخلة. برهن أن

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

البرهان:

من نظرية (١) إذا كانت $a+h, a$ واقعتين داخل R فإن

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{z-(a+h)} - \frac{1}{z-a}\right\}f(z)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2} + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

النتيجة تلي بأخذ النهايات عندما $h \to 0$ إذا أمكن إثبات أن الحد الأخير يقترب من الصفر. ولإثبات ذلك نستخدم الحقيقة أنه إذا كانت Γ هي دائرة نصف قطرها ε ومركزها a وتقع داخل R تماماً (أنظر شكل (٢-٥)) فإن:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

باختيار h بحيث تكون قيمتها المطلقة صغيرة بدرجة أن $a+h$ تقع داخل Γ، $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$ فإننا نرى من حقيقة أن Γ هي أن

$$|z-a-h| \geq |z-a|-|h| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |z-a| = \varepsilon$$

وأيضاً بما أن $f(z)$ تحليلية داخل R فإنه يمكن إيجاد عدد موجب M بحيث أن $|f(z)| < M$ وبما أن طول Γ هو $2\pi\varepsilon$ فإن

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \right| \leq \frac{|h| M (2\pi\varepsilon)}{2\pi \frac{\varepsilon}{2} . \varepsilon^2} = \frac{2|h|M}{\varepsilon^2}.$$

ويلي ذلك أن الطرف الأيسر يؤول للصفر عندما $h \to 0$. ومن الملاحظ أن النتيجة مكافئة إلى

$$\frac{d}{da} f(a) = \frac{d}{da} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)} dz \right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

وهي تعميم للتكاملات الكونتورية الخاصة بقاعدة ليبنز للمناطق تحت علامة التكامل.

نظرية (٣):

برهن تحت شروط نظرية (٢) أن:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

البرهان:

الحالتين حيث $n = 0, 1$ ينتجان من نظرية ١، ٢ على الترتيب بشرط أن نعرف $f^{0}(a) = f(a)$.

ولبرهان النظرية في حالة $n = 2$ نستخدم نظرية ٢ حيث $a + h, a$ يقعان في R فإن

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-a)^2} \right\} f(z) dz$$
$$= \frac{2}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz + \oint_{C} \frac{3(z-a)-2h}{(z-a-h)^2 (z-a)^2} f(z) dz$$

النتيجة تلي بأخذ النهاية عندما $h \to 0$ إذا أمكن إثبات أن الحد الأخير يقترب من الصفر. البرهان مماثل لبرهان نظرية ٢، وباستخدام حقيقة أن التكامل حول C يساوي التكامل حول Γ يكون لدينا

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{3(z-a)-2h}{(z-a-h)^2(z-a)^2}f(z)dz\right| \le \frac{|h|}{2\pi}\frac{M(2\pi\varepsilon)}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\varepsilon^2}$$

$$\le \frac{4|h|M}{\varepsilon^4}$$

بما أن M موجود بحيث أن:

$$\left|\{3(z-a)-2h\}f(z)\right| < M$$

بالمثل يمكن أن نبرهن النظرية في حالة $n = 3, 4, \dots$ النتيجة مكافئة إلى

$$\frac{d^n}{da^n}f(a) = \frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)}dz\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

<u>نظرية (٤):</u>

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في R فإن $f'(z), f''(z), \dots$ تحليلية في R.

<u>مثال:</u>

أوجد قيمة:

(أ) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$

(ب) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{(z+1)^4}dz$ حيث C هو الدائرة $|z| = 3$.

<u>الحل:</u>

(أ) بما أن

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

فإن

$$\oint_C \frac{\sin\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz = \oint_C \frac{\sin\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-2)}dz - \oint_C \frac{\sin\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-1)}dz$$

ومن صفة تكامل كوشي حيث $a = 1, a = 2$ على الترتيب فإن:

$$\oint_C \frac{\sin\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-2)}dz = 2\pi i\left\{\sin\pi(2)^2 + \cos\pi(2)^2\right\} = 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)} dz = 2\pi i \{\sin \pi + \cos \pi\} = -2\pi i$$

بما أن $z = 2, z = 1$ يكونان داخل المنحنى C،

تكون تحليلية داخل C، فإن التكامل المطلوب له القيمة:

$$2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i.$$

(ب) ليكن $f(z) = e^{2z}$، $a = -1$ في صيغة تكامل كوشي، فإن:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \qquad (1)$$

إذا كانت $n = 3$ فإن

$$f^{(3)}(-1) = 8e^{-2}, \qquad f^{(3)}(z) = 8e^{2z}$$

إذن (1) يصبح

$$f^{(3)}(-1) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z+1)^4} dz$$

ومنها نرى أن التكامل المطلوب له القيمة $\frac{8\pi i e^{-2}}{3}$.

نظرية (٥): (موريرا)

إذا كانت الدالة $f(z)$ متصلة في منطقة بسيطة الترابط R وإذا كان $\oint_C f(z) dz = 0$ حول منحنى بسيط مقفل C في R فإن $f(z)$ تكون تحليلية في R.

البرهان:

إذا كان $\oint_C f(z) dz = 0$ لا يعتمد على المسار C فإن $F(z) = \int_a^z f(z) dz$ لا يعتمد على المسار الذي يصل z, a طالما أن هذا المسار يقع في R.

وعلى ذلك فمن نظرية (٢) (نتائج نظرية كوشي) يلي أن $F(z)$ تحليلية في R، $F'(z) = f(z)$ وتكون $F'(z)$ تحليلية إذا كانت $F(z)$ كذلك.

إذن $f(z)$ تحليلية في R.

نظرية (٦): (متباينة كوشي)

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على الدائرة التي نصف قطرها r ومركزها عند $z = a$ وداخل هذه الدائرة فإن

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{M.n!}{r^n}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

و M ثابتاً ما بحيث $|f(z)| < M$ على الدائرة.

البرهان:

يكون لدينا من صيغة تكامل كوشي

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

وحيث $|z - a| = r$ على C وطول المنحنى هو $2\pi r$ يكون لدينا

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi i} \left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} .2\pi r = \frac{M.n!}{r^n}.$$

نظرية (٧): (نظرية ليوفيل)

إذا كان لجميع قيم z في المستوى المركب الشامل:

(i) $f(z)$ تحليلية. (ii) $f(z)$ محدودة

فإن $f(z)$ يجب أن تكون ثابت.

البرهان:

بوضع $n = 1$ في متباينة كوشي وإحلال z بدلاً من a فإن:

$$\left|f'(z)\right| = \frac{M}{r}$$

وبجعل $n \to \infty$ نستنتج أن $\left|f'(z)\right| = 0$ وبالتالي $f'(z) = 0$

$\therefore$ $f(z)$ تكون ثابت.

نظرية (٨): (النظرية الأساسية في الجبر)

كل معادلة كثيرة الحدود

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

حيث $a_n \neq 0, n \geq 1$ لها جذر واحد على الأقل.

البرهان:

إذا كانت $P(z)$ ليس لها جذر فإن $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ تكون تحليلية لجميع قيم z. وأيضاً $\left|f(z)\right| = \dfrac{1}{\left|P(z)\right|}$ تكون محدودة (وهي في الحقيقة تقترب من الصفر) كلما $|z| \to \infty$

وعلى ذلك ينتج من نظرية ليوفيل أن $f(z)$ وبالتالي $P(z)$ يجب أن تكون ثابتاً، أي أنه يوجد تناقض ويستنتج أن $P(z) = 0$ يجب أن يكون لها على الأقل جذر واحد. وكما يقال في بعض الأحيان أن $P(z)$ لها على الأقل صفراً واحداً.

مثال:

برهن أن كل معادلة كثير الحدود $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ حيث الدرجة $a_n \neq 0, n \geq 1$ لها بالضبط n من الجذور.

الحل:

من النظرية الأساسية في الجبر، $P(z)$ لها على الأقل جذر واحد. نرمز لهذا الجذر بالرمز α أي أن $P(\alpha) = 0$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} P(z) - P(\alpha) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n - \left(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n\right) \\ &= a_1(z - \alpha) + z_2\left(z^2 - \alpha^2\right) + \ldots + a_n\left(z^n - \alpha^n\right) \\ &= (z - \alpha)\phi(z) \end{aligned}$$

حيث $\phi(z)$ هي كثيرة حدود من درجة $n - 1$.

نطبق النظرية الأساسية في الجبر مرة أخرى، نرى أن $\phi(z)$ لها على الأقل صفر واحد والذي يرمز له بالرمز β (والذي يمكن أن يكون مساوياً للجذر α) وبالتالي

$$P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)\phi(z)$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة نرى أن $P(z)$ لها بالضبط n من الجذور.