المحاضرة الثامنة

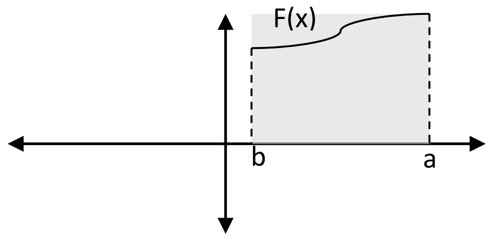
تطبيقات على التكامل

المساحة تحت المنحنى:

في ما يلى سوف ندرس كيف يمكن استخدام التكامل لايجاد المساحة تحت المنحنى أي المساحة المحصورة بين منحنى ومحور x أو المحصورة بين منحنيين:

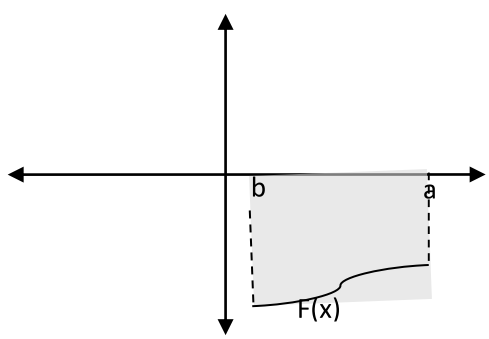
- اذا كانت $f(x) \geq 0$ ومتصلة على $[a,b]$ فان المساحة S المحصورة بين محور X ومنحنى $f(x)$ المقابل للفترة $[a,b]$ تكون (انظر الشكل)

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



- اذا كانت $f(x) < 0$ ومتصلة على $[a,b]$ فان المساحة S المحصورة بين محور X ومنحنى $f(x)$ المقابل للفترة $[a,b]$ تكون (انظر الشكل)

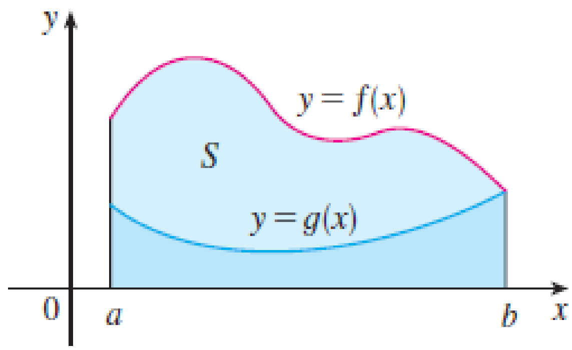
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



- في حالة حساب المساحة بين المنحنيين $f(x), g(x)$ فان المساحة S المحصورة بين المنحنيين $f(x), g(x)$ المقابل للفترة $[a,b]$ تكون (انظر الشكل)

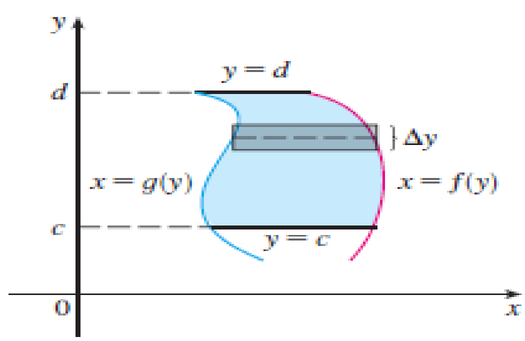
المساحة = مساحة المنطقة تحت المنحنى $\mathbf{f(x)}$ – مساحة المنطقة تحت المنحنى $\mathbf{g(x)}$

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



- في حالة حساب المساحة بين المنحنيين $f(y), g(y)$ فان المساحة S المحصورة بين المنحنيين $f(y), g(y)$ مقابل للفترة $[c,d]$ تكون (انظر الشكل)

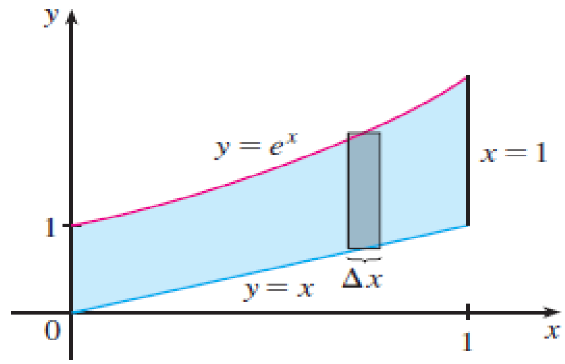
$$S = \int_c^d (f(y) - g(y))dy$$



<u>مثال ١:</u>

اوجد مساحة المنطقة المحددة من اعلى بالمنحنى $y = e^x$ ومن أسفل بالمنحنى $y = x$ ومن الجانبين $x = 0$ و $x = 1$.

<u>الحل:</u> برسم المنحنيات نحصل على



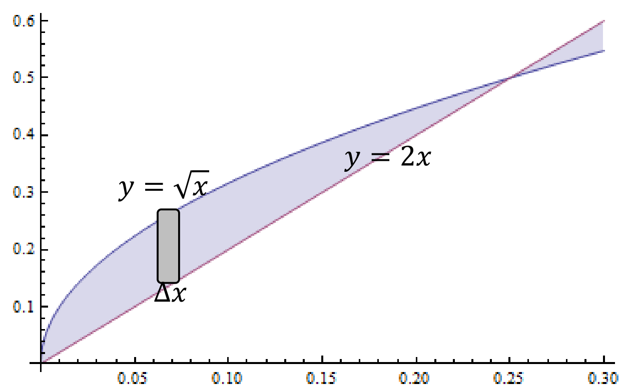
وبأخذ شريحة رأسية طولها Δx ونلاحظ ان حدود المنطقة $a = 0$ و $b = 1$ وبالتالى فان المساحة بين المنحنيين تعطى في الصورة

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (e^x - x)dx = e^x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}$$

مثال٢:

احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = \sqrt{x}$ والخط المستقيم $y = 2x$.

الحل: برسم المنطقة كما بالشكل



لايجاد قيم حدود التكامل نحسب نقاط تقاطع المنحنيين كالاتى:

$$\because y = \sqrt{x} \quad and \quad y = 2x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 4x^2 \quad \Rightarrow$$

$$4x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,(4x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \;\; and \quad (4x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad and \quad x = \frac{1}{4}$$

بالتعويض عن قيم x في اي معادلة لكى نحصل على قيم y وبالتالى فان قيم

$$at \;\; x = 0 \Rightarrow y = 0 \qquad and \qquad at \; x = \tfrac{1}{4} \;\; \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}$$

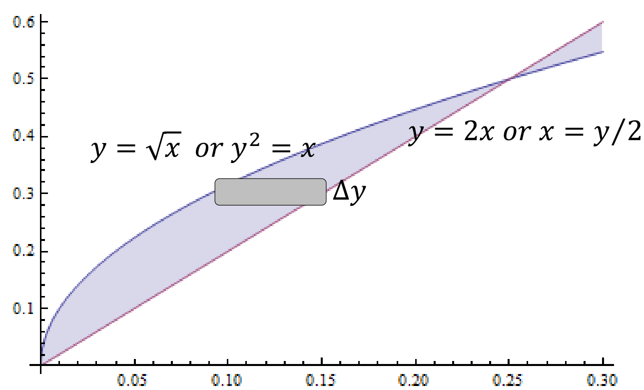
ونقاط التقاطع هى $(0,0)$ و $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ وبأخذ شريحة رأسية طولها Δx بالتالى فان المساحة المحصورة

بين المنحنيين هى

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\sqrt{x} - 2x\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 \Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

حل أخر :

يمكننا حل المثال السابق بأخذ شريحة أفقية طولها Δy (أي نجعل التكامل بالنسبة للمتغير y) كما بالشكل:



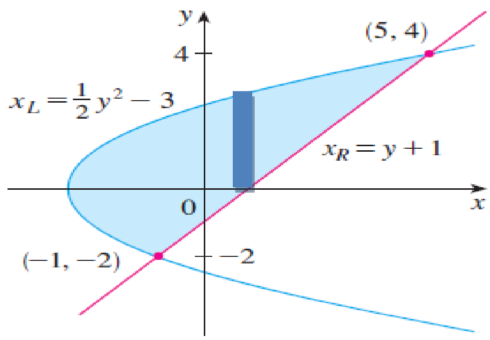
فان المساحة المحصورة بين المنحنيين هى

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{2} - y^2\right) dx = \frac{1}{4}y^2 - \frac{y^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

مثال 3:

احسب المساحة المحصورة بين الخط المستقيم $y = x - 1$ والمنحنى $y^2 = 2x + 6$.

الحل: برسم المنطقة كما بالشكل:



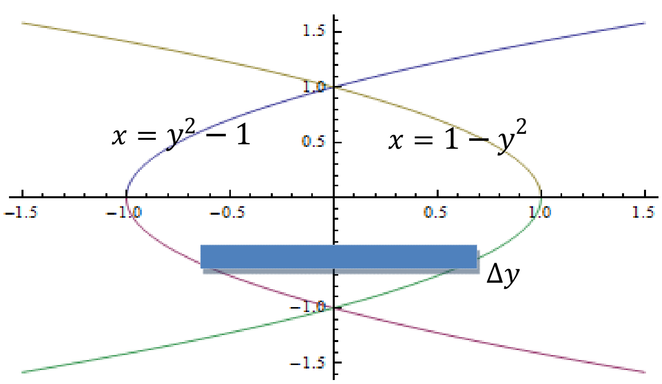
وبحساب نقاط التقاطع نحصل على $(5,4),(-1,-2)$ وبأخذ شريحة أفقية كما بالشكل. فان المساحة المحصورة بين المنحنيين هى

$$S = \int_{-2}^{4} (y+1) - \left(\frac{y^2}{2} - 3\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{y^2}{2} + y + 4\right) dy = 18.$$

مثال 4:

احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $x = y^2 - 1$ والمنحنى $x = 1 - y^2$.

الحل: برسم المنطقة كما بالشكل:



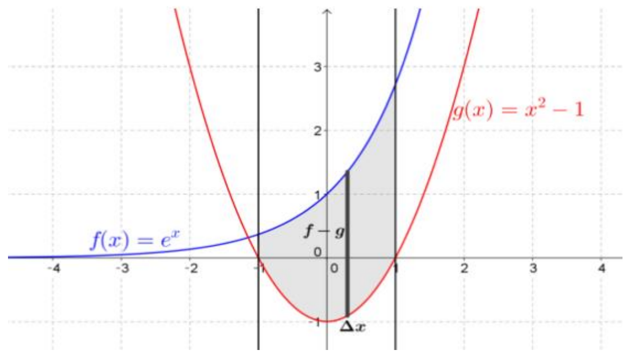
وبحساب نقاط التقاطع نحصل على $(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$ وبأخذ شريحة أفقية كما بالشكل. فان المساحة المحصورة بين المنحنيين هى

$$S = \int_{-1}^{1} (1-y^2)-(y^2-1)dx = \int_{-1}^{1} 2-2y^2 dx = \frac{8}{3}$$

مثال ٥:

احسب المساحة المحصورة بين المنحنيات $y = e^x$ و $y = x^2 - 1$. و $x = -1$ و $x = 1$.

الحل: برسم المنطقة كما بالشكل:



وبأخذ شريحة رأسية طولها Δx ونلاحظ ان حدود المنطقة $a = -1$ و $b = 1$ وبالتالى فان المساحة بين المنحنيين تعطى في الصورة

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{1} \left(e^x - (x^2-1)\right)dx = e^x - \frac{x^3}{3} + x \Big|_{-1}^{1}$$

$$= e - \frac{1}{e} + \frac{4}{3}$$

تمارين:

احسب المساحة تحت المنحنيات الاتية:

١. $y = x$ and $y = (x-2)^2$.

٢. $y = x$ and $x = 3 - \frac{y^2}{4}$.

ولمزيد من الامثلة يمكن الاستعانة بالموقع الاتى:

https://www.youtube.com/watch?v=gPP3rP0CXnk&list=PL9fwy3NUQKwY6bGFmuJGxU8kL7vx3U133&index=27

الحجوم الدورانية:

بفرض أن لدينا خط مستقيم يوازى المحور الافقى وأننا قمنا بدوران هذا الخط الافقى دورة كاملة حول المحور الافقى فان الشكل الناتج يكون عبارة عن اسطوانة ، ويمكننا باستخدام التكامل المحدد ومعادلة الخط المستقيم الافقى حساب حجم الاسطوانة.

وبشكل عام اذا كان منحنى الدالة وهو $f(x)$ ونريد حساب الحجم الدورانى V الناتج من دوران $f(x)$ حول المحور الافقى في الفترة $[a,b]$ فان الحجم الكلى عبارة عن

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b \pi\,(f(x))^2dx$$

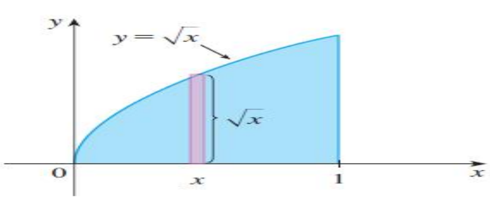
حيث أن $A(x)$ هى مساحة المنطقة ، ونلاحظ أنه عند دوران الدالة فانها تدور على شكل اسطوانة نصف قطرها هو $f(x)$ وبالتالى فان مساحة الاسطوانة هى $\pi\,(f(x))^2$.

مثال ١:

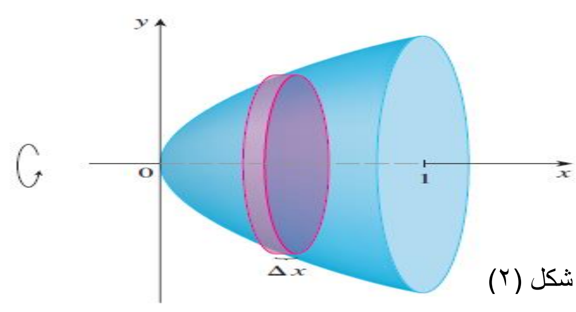
احسب الحجم الدورانى الناتج عن دوران منحنى الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ حول الخط الافقى في الفترة $[0,1]$.

الحل:

برسم الدالة المعطاة بشكل (١):



شكل (١)



شكل (٢)

فعند دوران الدالة حول المحور الافقى نحصل على الشكل المصمت بشكل (٢)، وبأخذ قرص طوله Δx ونصف قطره $f(x)=\sqrt{x}$ وبالتالى فان الحجم الدورانى معطى بالصورة:

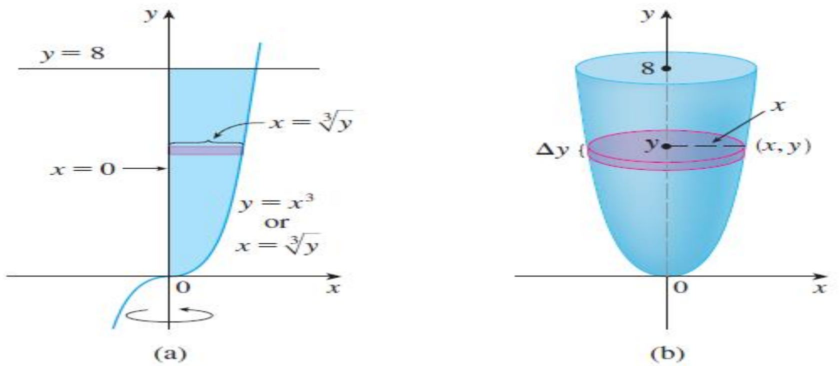
$$V=\int_a^b \pi\,(f(x))^2dx=\int_0^1 \pi\,\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\int_0^1 \pi x dx=\frac{\pi}{2}$$

مثال ٢:

أوجد الحجم الدورانى الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^3$ و $y = 8$ و $x = 0$ حول محور y .

الحل:

برسم الدالة المعطاة بشكل (a):



فعند دوران الدالة حول المحور y نحصل على الشكل المصمت بشكل (b)، وبأخذ قرص طوله Δy ونصف قطره $f(x) = \sqrt[3]{y}$ وبالتالى فان الحجم الدورانى معطى بالصورة:

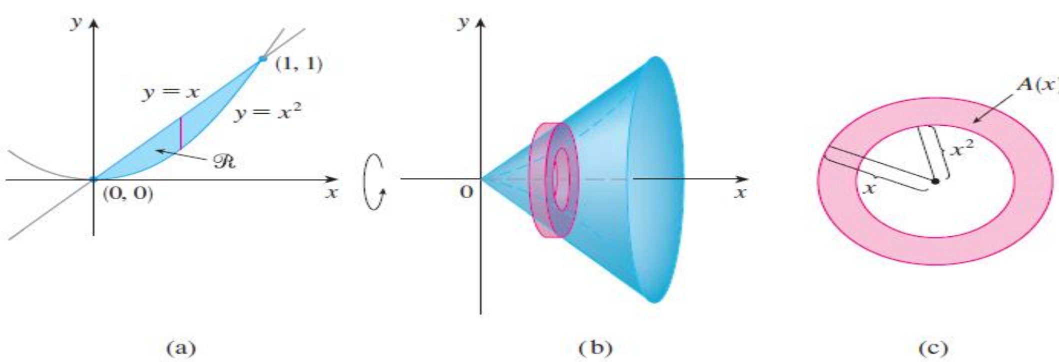
$$V = \int_a^b \pi\,(f(y))^2 dy = \int_0^8 \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dx = \int_0^1 \pi y^{2/3} dy = \frac{96\pi}{5}$$

مثال ٣:

أوجد الحجم الدورانى الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = x$ حول محور x .

الحل:

برسم الدالة المعطاة بشكل (a):



فعند دوران الدالة حول المحور y نحصل على الشكل المصمت بشكل (b)، نلاحظ أن المنطقة الدورانية هى المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = x^2$ و $y = x$ وبالتالى يكون لدينا نصف قطر داخلى يساوى x^2 $= f_2(x)$ ونصف قطر خارجى $f_1(x) = x$ و بأخذ قرص طوله Δx وبالتالى فان الحجم الدورانى معطى بالصورة:

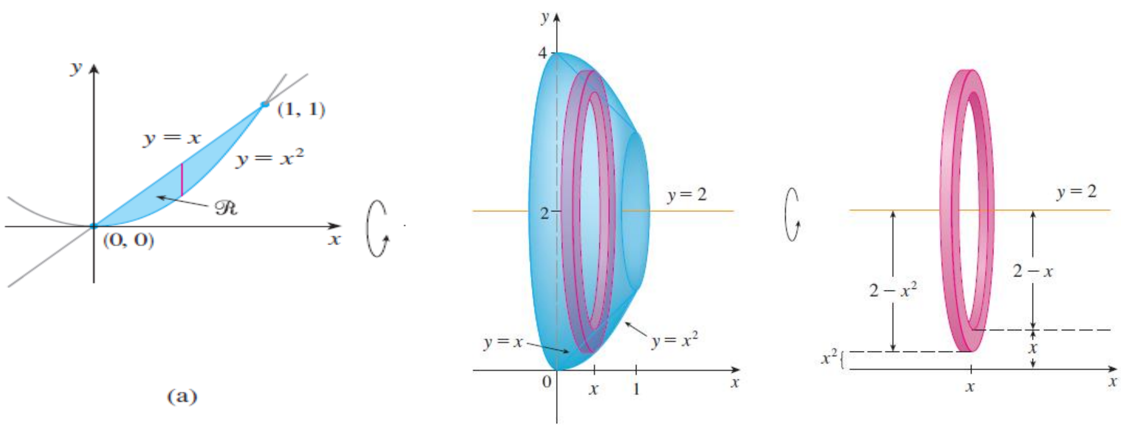
$$V = \int_a^b \pi\,[(f_1(x))^2 - (f_2(x))^2]dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx = \frac{2\pi}{15}$$

مثال 4:

أوجد الحجم الدورانى الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = x$ حول $y = 2$.

الحل:

برسم الدالة المعطاة بشكل (a):



نلاحظ أن المنطقة الدورانية هى المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = x^2$ و $y = x$ وبالتالى يكون لدينا نصف قطر داخلى يساوى $f_2(x) = 2 - x^2$ ونصف قطر خارج $f_1(x) = 2 - x$ و بأخذ قرص طوله Δx وبالتالى فان الحجم الدورانى معطى بالصورة:

$$V = \int_a^b \pi\,[(f_1(x))^2 - (f_2(x))^2]dx = \int_0^1 \pi((2 - x^2)^2 - (2 - x)^2)dx = \frac{8\pi}{15}$$

ملاحظة:

- اذا كان منحنى الدالة له الشكل $y = f(x)$ ونريد حساب الحجم الدورانى الناتج عن دوران هذا المنحنى حول محور $y = c$ فان نصف قطر القرص يكون $c - f(x)$ وبذلك يكون الحجم الدورانى هو

$$V = \int_a^b \pi \, (c - f(x))^2 dx$$

- اذا كان منحنى الدالة له الشكل $x = f(y)$ ونريد حساب الحجم الدورانى الناتج عن دوران هذا المنحنى حول محور $x = c$ فان نصف قطر القرص يكون $c - f(y)$ وبذلك يكون الحجم الدورانى هو

$$V = \int_a^b \pi \, (c - f(y))^2 dy$$

<u>تمارين:</u>

١. احسب الحجم الدورانى الناتج عن دوران منحنى الدالة $y = x + 1$ و $y = 0$ و $x = 0$ $\quad x = 2$ حول الخط الافقى.

ولمزيد من الامثلة يمكن الاستعانة بالموقع الاتى:

https://www.youtube.com/watch?v=CSmgX_n9P2U&list=PL9fwy3NUQKwY6bGFmuJGxU8kL7vx3U133&index=28