Topology $L_{8,9}$ - 3^{rd} year: Math 30-3-2020

-1-

Continuous functions - الدوال المتصلة

تعريف: نفرض ان $f: X \longrightarrow Y$ دالة من فضاء تبولوجي X الى فضاء تبولوجي Y وان $x \in X$ نقطة اختيارية.
الدالة f متصلة عند x إذا وفقط اذا تحقق الشرط:
لكل فئة مفتوحة V من Y وتحتوي $f(x)$ توجد فئة مفتوحة U من X وتحتوي x بحيث ان
$$f(U) \subset V$$
اذا كانت f متصلة عند كل نقطة من X فانها تسمى متصلة

Discontinuity Criterion - شرط عدم الاتصال عند نقطة

الدالة $f: X \longrightarrow Y$ تكون غير متصلة عند نقطة ما $x \in X$ اذا وفقط إذا وجدت فئة مفتوحة V من Y تحتوي $f(x)$ بحيث ان كل فئة مفتوحة U من X وتحتوي x تحقق $f(U) \not\subset V$.

مثال 1: نفرض ان $X = Y = R$ وان $\tau_X = \tau_Y = \tau_u$ فان الدالة

$$f: X \longrightarrow Y, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in Q \\ 1 & \text{if } x \in Q^c \end{cases}$$

ليست متصلة عند أي نقطة $x \in R$.
السبب: نفرض ان $x \in R$ ولتكن x عدد قياسي، من تعريف f نجد ان $f(x) = 0$
يكفي اختيار V فئة مفتوحة تحتوي $f(x)$ بالشكل $(-\varepsilon, \varepsilon)$ حيث $0 < \varepsilon < 1$. اي جوار لـ x سيكون فئة مفتوحة تحتوي x من تعريف التبولوجي القياسي لـ R عندئذ $f(U) = \{0, 1\} \not\subset (-\varepsilon, \varepsilon)$

Topology $L_{8,9}$ – 3rd year Math. 30-3-2020

مثال ٢ :

الراسم $f:(X,\tau_1)\longrightarrow(X,\tau_2)$
حيث $f(x)=x$ متصل فقط، فقط اذا
كان $\tau_2\subset\tau_1$.

اذا كان f متصل، نفرض $V\in\tau_2$ نبين ان
$V\in\tau_1$. بأخذ $x\in V \Leftarrow f(x)\in V$
باستخدام ان f متصل يوجد $U\in\tau_1$ بحيث
$x\in U$, $f(U)\subset V \Rightarrow$
$U\subset V \Rightarrow V\in\tau_1$
ثم نصل ان $\tau_2\subset\tau_1$.
والعكس اذا كان $\tau_2\subset\tau_1$ فان f متصل لأن
لـ $x\in X$ اختياري و $V\in\tau_2$ حيث $f(x)\in V$

$$\exists\, U=f^{-1}V=V,\quad x\in U,\quad f(U)=V$$

اذا ان f متصل عند x وحيث ان x اختياري
فان f متصل.

مثال ٣

الدالة $f:(R,\tau_u)\longrightarrow R(\tau_\infty)$ حيث
$f(x)=x$ متصل.
وعكسا اذا بدلنا τ_∞ و τ_u لن يكون f متصل.

تعاريف متكافئة للاتصال

نظرية: للراسم $f:X\longrightarrow Y$ من فراغ
X الى فراغ Y الشروط التالية متكافئة

(1) f - Continuous
(2) $f^{-1}V$ - open in X $\forall\, V$ - open in Y
(3) f^{-1}(basic (subbasic)) open in Y is open in X.

Topology $L_{8,9}$ - 3rd year Math. 30-3-2020

(4) f^{-1}(closed set in Y) is closed in X

(5) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \quad \forall A \subset X$

(6) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B}) \quad \forall B \subset Y$

البرهان: انظر الكتاب

Another discontinuity criterion شرط آخر لعدم الاتصال

الدالة $f: X \longrightarrow Y$ تكون غير متصلة اذا وفقط اذا وجد فئة مفتوحة V من Y بحيث صورتها العكسية $f^{-1}V$ ليست مفتوحة من X.

بعض الخصائص الاولية عن الاتصال

١- اذا كانت $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ دوال متصلة فإن $g \circ f: X \longrightarrow Z$ ايضا متصل.

$(g \circ f)^{-1}(U\text{-open in } Z) = f^{-1}g^{-1}(U)$ - open in X لان كل من g, f متصل.

٢- اذا كانت $f: X \longrightarrow Y$ متصل وكانت $A \subset X$ فإن اختصار f على A ($f_{/A}$) متصل

$f_{/A}: A \longrightarrow Y$.

$(f_{/A})^{-1}(V\text{-open in } Y) = f^{-1}V \cap A$ - open in A لان

٣- اذا كانت $f: X \longrightarrow Y$ متصل وكانت $f(X)$ فإن f كدالة $f: X \longrightarrow f(X)$ متصل.

$f^{-1}(V \cap f(X)) = f^{-1}V \cap f^{-1}f(X) = f^{-1}V$ - open. لان

Topology $L_{8,9}$ - 3rd year Math. 30-3-2020

-4-

حل تمرينات ص 117 مسائل

1 , 2 , 3 , 4 , 7 , 10 , 11.

الدوال المفتوحة والهوميومورفيزم

open functions and Homeomorphism:

تعريف: الدالة $f: X \to Y$ من فضاء X إلى فضاء Y تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت صورة أي فئة مفتوحة في X هي فئة مفتوحة في Y

i.e $f(U)$ is open in Y for each U open subset of X.

تعريف: نفرض $f: X \to Y$ راسم أحادي وفوقي من فضاء X إلى فضاء Y. إذا كانت f مفتوح ومتصل فإن f يسمى هوميومورفيزم أو راسم توبولوجي وفي هذه الحالة نقول أن X هوميومورفك لـ Y أو ت.ب. Y توبولوجيا. ويرمز لذلك أحيانا بالرمز $X \cong Y$.

نظرية: نفرض $f: X \to Y$ راسم فإن التقارير التالية متكافئة

(a) f - homeomorphism

(b) $f: X \to Y$ and $f^{-1}: Y \to X$ - both Continuous.

(c) f - Continuous and Closed

(d) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ $\forall A \subset X$.

نظرية: إذا كان $f: X \to Y$ راسم توبولوجي وكان $A \subset X$ فإن

$f_{/A} : A \to f(A)$

هيوموروفيزم.

Topology $L_{8,9}$ 3rd year Math - 30-3-2020

-5-

تمرين:

اثبت ان العلاقة (تكافؤ توبولوجيا او $\cong$) علاقة تكافؤ على اي مجموعة من الفضاءات التوبولوجية $\{X_\alpha : \alpha \in \Delta\}$.

تعريف: الخاصية P للفضاء X تسمى خاصية توبولوجية اذا وفقط اذا كل فضاء Y يكافئ توبولوجيا X يملك نفس الخاصية.

أعليه الخاصية هي التي يحافظ عليها تحت تأثير نوع ما من الرواسم مثل المتصل ، المفتوح ، المغلق او الراسم التوبولوجي.

مثال:

خاصية ان يكون الفضاء التوبولوجي يحتوي مجموعة كثيفة مرقمة خاصية لا متغيرة بالنسبة لعائلة الرواسم المتصلة

اي اذا كان $f : X \xrightarrow{onto} Y$ راسم متصل من فضاء X على فضاء Y وكانت $A \subset X$ كثيفة في X فان $f(A)$ كثيفة في Y.

نفرض ان $f : X \xrightarrow[cont.]{onto} Y$ وان A مجموعة جزئية في X حيث $\bar{A} = X$. اتصال f يعطي

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \qquad \because \bar{A} = X$$

$$\overline{f(A)} \subset Y$$

$$\therefore Y = f(X) = f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$$

$$\Rightarrow \overline{f(A)} = Y$$

وحيث ان $card\, f(A) \le card\, A$ فان

$$d(Y) \le d(X)$$

لذلك احتواء الفضاء على مجموعة كثيفة مرقمة تنتقل للصورة المتصلة لهذا الفضاء