الباب الخامس

حركة جسيم في الفراغ

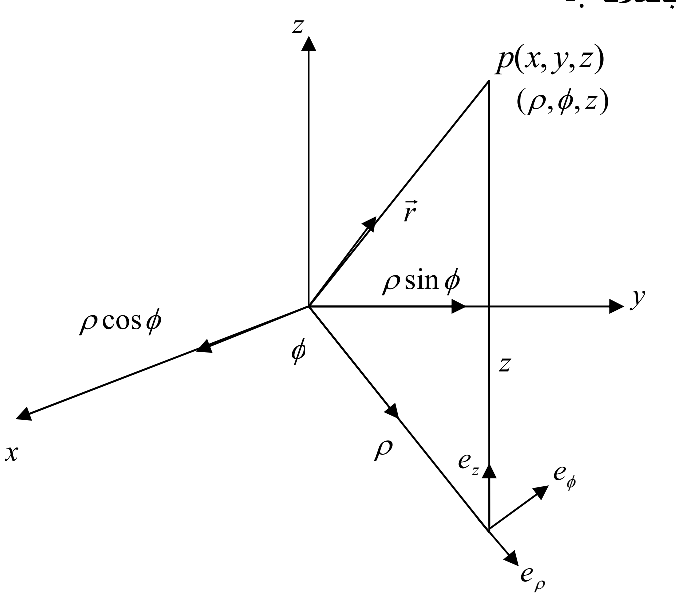
استنتج معادلات الحركة لجسيم يتحرك في الفراغ في الإحداثيات الاسطوانية(ρ,ϕ,z).

الحل

لاستنتاج معادلات الحركة لجسيم يتحرك في الفراغ في الإحداثيات الاسطوانية .

نوجد أولا متجه موضع الجسيم في الإحداثيات الاسطوانية وحيث أن متجه موضع الجسيم

بالنسبة للإحداثيات الكارتيزية الثابتة في الفراغ يعطى بالعلاقة :-



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad (1)$$

حيث $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ ، $\hat{k}$ متجهات وحدة ثابتة في الفراغ

وحيث أن العلاقات التي تربط بين

الإحداثيات الكارتيزية والاسطوانية هي :-

$$x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi, z = z \qquad (2)$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل علي :-

$$\vec{r} = \rho\cos\phi\,\hat{i} + \rho\sin\phi\,\hat{j} + z\hat{k} \qquad (3)$$

وحيث أن متجهات الوحدة في الإحداثيات الاسطوانية تعين من العلاقات التالية

$$\hat{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}/\partial\rho}{|\partial\vec{r}/\partial\rho|}, \hat{e}_\phi = \frac{\partial\vec{r}/\partial\phi}{|\partial\vec{r}/\partial\phi|}, \hat{e}_z = \frac{\partial\vec{r}/\partial z}{|\partial\vec{r}/\partial z|} \qquad (4)$$

وبالتعويض من (3) في (4) نحصل علي :-

$$\hat{e}_\rho = \cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j}, \hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}, \hat{e}_z = \hat{k} \qquad (7)$$

وبالتعويض من (7) في (3) نحصل علي متجه موضع الجسيم في الإحداثيات الاسطوانية علي

الصورة :-

$$\vec{r} = \rho\,\hat{e}_\rho + z\,\hat{e}_z \qquad (8)$$

وبتفاضل (8) بالنسبة للزمن نحصل علي متجه سرعة الجسيم في الإحداثيات الاسطوانية علي الصورة :-

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{e}_z \qquad (9)$$

وبتفاضل (9) بالنسبة للزمن نحصل علي متجه عجلة الجسيم في الإحداثيات الاسطوانية على الصورة التالية

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z \qquad (10)$$

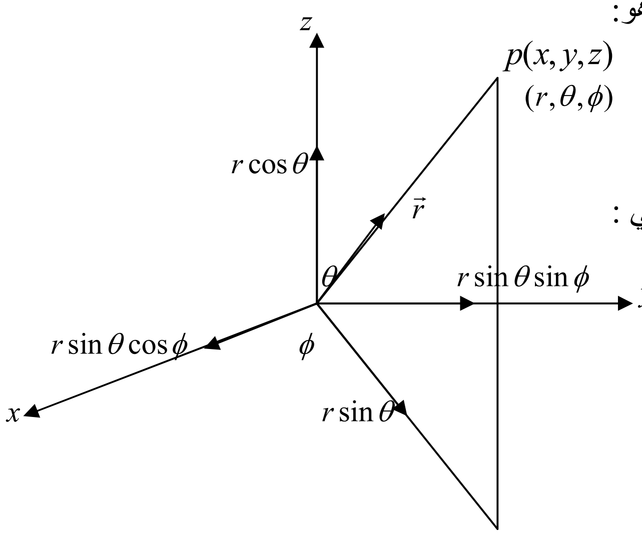
وبتطبيق قانون نيوتن الثاني نحصل علي معادلات الحركة للجسيم في الإحداثيات الاسطوانية علي الصورة التالية :-

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\Phi}^2) = F_\rho, \quad \frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = F_\phi, \quad m\ddot{z} = F_z \qquad (11)$$

استنتج معادلات الحركة لجسيم يتحرك في الفراغ في الاحداثيات الكروية (r,θ,ϕ).

نوجد اولا متجه موضع الجسيم في الاحداثيات الكروية

وحيث ان متجه موضع الجسيم في الاحداثيات الكارتيزية هو:



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad (1)$$

وحيث ان العلاقات بين الاحداثيات الكارتيزية والكروية هي :

$$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta \quad (2)$$

وبالتعويض من (2)في(1) نحصل علي:

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k} \qquad (3)$$

وحيث ان متجهات الوحدة في الاحداثيات الكروية تعين من العلاقات:

$$\hat{e}_r = \frac{\partial \vec{r}/\partial r}{\left|\partial \vec{r}/\partial r\right|}, \hat{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}/\partial \theta}{\left|\partial \vec{r}/\partial \theta\right|}, \hat{e}_\phi = \frac{\partial \vec{r}/\partial \phi}{\left|\partial \vec{r}/\partial \phi\right|} \quad (4)$$

وبالتعويض من(3)في (4) نحصل علي:

$$\hat{e}_r = \frac{\sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\hat{k}}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta}}$$

$$\hat{e}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\hat{k} \qquad (5)$$

$$\hat{e}_\theta = \frac{r\cos\theta\cos\phi\hat{i} + r\cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - r\sin\theta\hat{k}}{\sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta}}$$

$$\hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\hat{k} \qquad (6)$$

$$\hat{e}_\phi = \frac{-r\sin\theta\sin\phi\hat{i} + r\sin\theta\cos\phi\,\hat{j}}{\sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi}}$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j} \qquad (7)$$

وبالتعويض من (5)في (3) نحصل علي متجه الموضع في الاحداثيات الكروية علي الصورة:

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \qquad (8)$$

وبتفاضل (8)بالنسبة للزمن نحصل علي متجه السرعة في الإحداثيات الكروية:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} \qquad (9)$$

وبتفاضل $\hat{e}_r$ بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(\cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}) + \dot{\phi}\sin\theta(-\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}) \quad (10)$$

وبالتعويض من (7) ,(6) في (10) نحصل على

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi \qquad (11)$$

وبذلك تصبح (9)علي الصورة التالية:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi \quad (12)$$

حيث $\dot{r}$ هي مركبة السرعة في اتجاه نصف القطر، $r\dot{\theta}$ هي مركبة السرعة الرأسية، $r\sin\theta\dot{\phi}$ هي مركبة السرعة الأفقية

وبتفاضل (12)بالنسبة للزمن نحصل علي متجه عجلة الجسيم في الإحداثيات الكروية علي الصورة:

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \dot{r}\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \\ &+ r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\phi + r\sin\theta\,\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi + r\sin\phi\frac{d\hat{e}_\phi}{dt}\end{aligned} \qquad (13)$$

وبتفاضل $\hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$ بالنسبة للزمن واستخدام (7) ,(6) ,(5) والتعويض في (13)نحصل على:

$$\begin{aligned}\vec{a} = &\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_\theta + \\ &\left(r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right)\hat{e}_\phi\end{aligned} \qquad (14)$$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني نحصل علي معادلات الحركة لجسيم يتحرك في الفراغ في الاحداثيات الكروية علي الصورة:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2) = F_r$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) = F_\theta$$

$$m(r\sin\theta\ddot{\phi}+2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)=F_{\phi}$$

حالتان خاصتان:

إذا كان الجسيم يتحرك علي السطح الداخلي لكرة ملساء نصف قطرها a فان $r=a$ ، $\dot{r}=\ddot{r}=0$

وبذلك تصبح معادلات الحركة على الصورة التالية:

$$-ma(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)=F_r$$

$$ma(\ddot{\theta}-\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)=F_{\theta}$$

$$\frac{m}{a\sin\theta}\frac{d}{dt}(a^2\sin^2\theta\dot{\phi})=F_{\phi}$$

اذا كان الجسيم يتحرك علي السطح الداخلي لمخروط دائري املس فان $\theta=\alpha$ ، $\dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$ حيث

α هي نصف زاوية رأس المخروط وبذلك تصبح معادلات الحركة على الصورة التالية:

مثال:

ادرس حركة جسيم قذف افقيا على السطح الداخلى لكرة ملساء جوفاء نصف قطرها a من

نقطه على السطح على بعد زاوى α من اسفل نقطة فى الكرة

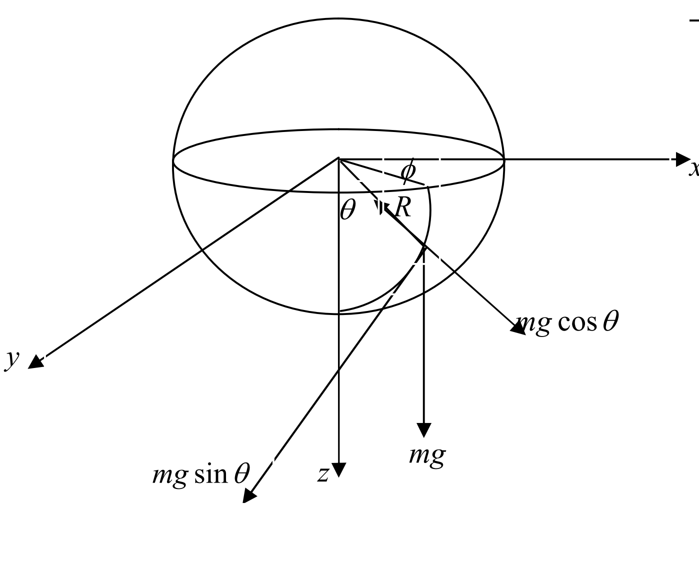
الحل :

معادلات حركة جسيم يتحرك على السطح الداخلي لكرة جوفاء ملساء نصف قطرها a هي

$$-ma(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)=mg\cos\theta-R \quad (1)$$

$$ma(\ddot{\theta}-\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)=-mg\sin\theta \quad (2)$$

$$\frac{m}{a\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(a^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right)=0 \quad (3)$$



المعادلات (1), (2), (3) تحتوى على ثلاث مجاهيل

هم R,θ,ϕ بتكامل (3) نحصل على المعادلة التالية

$$a^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = c_1 \qquad (4)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الابتدائية للحركة وهى عند $\theta = \alpha$ كانت $a \sin \theta \dot{\phi} = v_\circ$

ومنها نحصل على $c_1 = v_\circ \, a \sin \alpha$ وبذلك تصبح (4) على الصورة

$$\dot{\phi} = \frac{v_\circ \sin \alpha}{a \sin^2 \theta} \qquad (5)$$

بالتعويض من (5) فى (2) نحصل على

$$\ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \frac{{v_0}^2 \sin^2 \alpha}{a^2 \sin^4 \theta} = \frac{-g}{a} \sin\theta \qquad (6)$$

المعادلة (6) يمكن كتابتها على الصورة

$$\dot{\theta} d\dot{\theta} - \frac{{v_0}^2 \sin^2 \alpha}{a^2} \sin^{-3} \theta d \sin\theta = \frac{-g}{a} \sin\theta d\theta \qquad (7)$$

بتكامل (7) نحصل على

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{{v_0}^2 \sin^2 \alpha}{2a^2 \sin^2 \theta} = \frac{g}{a} \cos\theta + c_2 \qquad (8)$$

حيث c_2 ثابت يعين من الشروط الابتدائية للحركة وهى عند $\theta = \alpha$ كانت $\dot{\theta} = 0$ ومنها نحصل

على $c_2 = \frac{{v_0}^2}{2a^2} - \frac{g}{a} \cos\alpha$

وبذلك تصبح (8) على الصورة

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(\cos\theta - \cos\alpha) - \frac{{v_0}^2}{a^2 \sin^2 \theta}\left(\cos^2 \theta - \cos^2 \alpha\right) \qquad (9)$$

بالتعويض من (9) ,(5) فى (1) نحصل على

$$R = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha) + \frac{m{v_0}^2}{a}$$

الحركة داخل سطح الكرة تكون دائما بين مستويين أفقيين

لإيجاد نهايات الحركة نضع $\dot{\theta} = 0$ وبذلك تصبح (9) على الصورة

$$0 = (\cos\theta - \cos\alpha)\left[\frac{2g}{a} - \frac{{v_0}^2}{a^2\sin^2\theta}(\cos\theta + \cos\alpha)\right] \quad (10)$$

وبحل المعادلة(10) بالنسبة إلى $\cos\theta$ فنحصل على $\cos\theta = \cos\alpha$ وهذا يناظر الموضع الإبتدائي للقذف أو

$$\frac{2g}{a} - \frac{{v_0}^2}{a^2\sin^2\theta}(\cos\theta + \cos\alpha) = 0 \quad (11)$$

المعادلة (11) يمكن كتابتها على الصورة

$$\cos^2\theta + \frac{{v_0}^2}{2ag}\cos\theta + \frac{{v_0}^2}{2ag}\cos\alpha - 1 = 0 \quad (12)$$

والمعادلة (12) يمكن كتابتها على الصورة

$$\cos^2\theta + n^2\cos\theta + n^2\cos\alpha - 1 = 0 \quad (13)$$

حيث $n^2 = \frac{v_\circ^2}{2ag}$ وبحل المعادلة (13) بالنسبة إلى $\cos\theta$ نحصل على

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(-n^2 \pm \sqrt{n^4 - 4n^2\cos\alpha + 4}\right) \quad (14)$$

فإذا تم اختيار الإشارة السالبة فإن (14) تصبح على الصورة التالية

$$|\cos\theta| = \frac{1}{2}\left(n^2 + \sqrt{n^4 - 4n^2\cos\alpha + 4}\right) > \frac{1}{2}\left(n^2 + \sqrt{n^4 - 4n^2 + 4}\right) \quad (15)$$
$$> 1$$

وهذا الجواب مرفوض وبالتالي فإن الموضع الآخر للجسيم يكون عند

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{2}\left(-n^2 + \sqrt{n^4 - 4n^2\cos\alpha + 4}\right) \quad (16)$$

لإيجاد الشرط اللازم لكي يرتفع الجسيم أو ينخفض أسفل مستوى القذف

الجسيم يرتفع أو ينخفض أسفل مستوى القذف اذا كانت $\theta_2 > \alpha$ فإن الجسيم يرتفع أعلى مستوى القذف أو إذا كانت $\theta_2 < \alpha$ فإن الجسيم ينخفض أسفل مستوى القذف وهذا يناظر أنه إذا كانت $\cos\theta_2 < \cos\alpha$ فإن الجسيم يرتفع أعلى مستوى القذف أو إذا كانت $\cos\theta_2 > \cos\alpha$ فإن الجسيم ينخفض أسفل مستوى القذف أي أنه إذا كان

$$\frac{1}{2}\left(-n^2 + \sqrt{n^4 - 4n^2\cos\alpha + 4}\right) < \cos\alpha \quad (17)$$

المعادلة (17) يمكن كتابتها على الصورة

$$\sqrt{n^4 - 4n^2\cos\alpha + 4} < 2\cos\alpha + n^2 \quad (18)$$

وبتربيع طرفي (18) نحصل على

$$1 - \cos^2\alpha < 2n^2\cos\alpha \quad (19)$$

والمعادلة (19) يمكن كتابتها على الصورة

$$\sin^2\alpha < \frac{v_\circ^2}{ag}\cos\alpha \quad (20)$$

ومن المعادلة (20) نحصل على

$$v_\circ^2 > ag\sin\alpha\tan\alpha \quad (21)$$

والمعادلة (21) تمثل شرط أن يرتفع الجسيم فوق مستوى القذف. وإذا كان

$$v_\circ^2 < ag\sin\alpha\tan\alpha \quad (22)$$

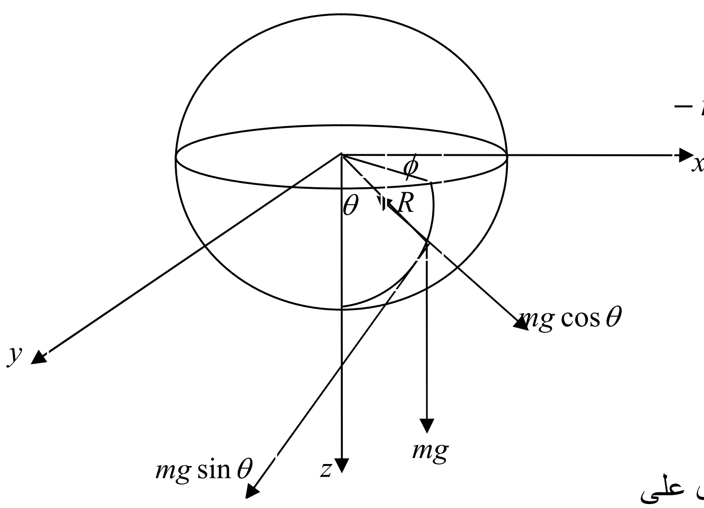
فإن المعادلة (22) تمثل شرط أن ينخفض الجسيم أسفل مستوى القذف.

<u>مثال:</u>

قذف جسيم افقيا من نقطة $p_\circ$ علي السطح الداخلي الاملس لإناء نصف كروي مركزه o ومحوره oz رأسي لأسفل وإذا كانت $z\hat{o}p_\circ = \beta$ برهن ان السرعة الابتدائية التي تكاد تكفي كي يصل الجسيم الي حافة الاناء تساوي $\sqrt{2ag\sec\beta}$.

<u>الحل:</u>

معادلات الحركة لجسيم يتحرك على السطح الداخلي الأملس لإناء نصف كروي ونصف قطره a هي :



$$-ma(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) = mg\cos\theta - R \qquad (1)$$

$$ma(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2) = -mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$\frac{m}{a\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(a^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right) = 0 \qquad (3)$$

وحيث أن عدد المعادلات يساوى عدد المجاهيل

هم ϕ,θ,R فإنه يوجد حل وحيد وبتكامل (3) نحصل على

$$a^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = c_1 \qquad (4)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة و هى عند $\theta = \beta$ كانت $a\sin\beta\,\dot{\phi} = v_0$

ومنها نحصل على $a\sin\beta\,v_0 = c_1$ وبذلك تصبح (4) على الصورة

$$\dot{\phi} = \frac{v_0\sin\beta}{a\sin^2\theta} \qquad (5)$$

وبالتعويض من (5) فى (2) نحصل على

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\frac{{v_0}^2\sin^2\beta}{a^2\sin^4\theta} = \frac{-g}{a}\sin\theta \qquad (6)$$

المعادلة (6)يمكن كتابتها على الصورة

$$\dot{\theta}\, d\dot{\theta} - \frac{{v_0}^2 \sin^2\beta}{a^2} \sin^{-3}\theta\, d\sin\theta = \frac{-g}{a}\sin\theta\, d\,\theta \qquad (7)$$

و بتكامل (7) نحصل على

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{{v_\circ}^2 \sin^2\beta}{2a^2\sin^2\theta} = \frac{g}{a}\cos\theta + c_2 \qquad (8)$$

و حيث c_2 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة و هى عند $\theta = \beta$ كانت $\dot{\theta} = 0$

ومنها نحصل على $c_2 = \frac{{v_\circ}^2}{2a^2} - \frac{g}{a}\cos\beta$ وبذلك تصبح (8) على الصورة التالية

$$\dot{\theta} = \frac{{v_\circ}^2}{a^2} - \frac{2g}{a}\cos\beta + \frac{2g}{a}\cos\theta - \frac{{v_\circ}^2\sin^2\beta}{a^2\sin^2\theta} \qquad (9)$$

و عندما يصل الجسيم إلى حافة الإناء فإن $\theta = \frac{\pi}{2}\,,\,\dot{\theta} = 0$ و بذلك تصبح (9)على الصورة

$$0 = \frac{{v_\circ}^2}{a^2} - \frac{2g}{a}\cos\beta - \frac{{v_\circ}^2\sin^2\beta}{a^2} \qquad (10)$$

وبحل المعادلة (10) بالنسبة إلى $v_\circ$ نحصل على

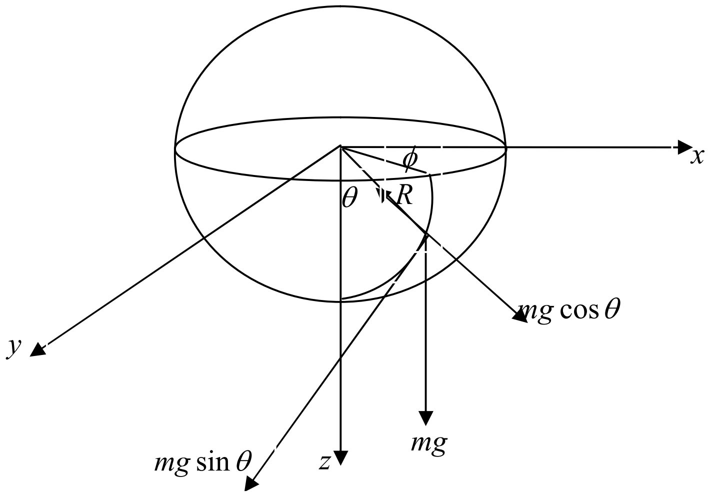
$$v_\circ = \sqrt{2\,a\,g\sec\beta}$$

<u>مثال:</u>

قذف جسيم كتلته m بسرعة أفقية V من نقطة على الدائرة الأفقية الكبرى لكرة نصف قطرها a وتحرك الجسيم على السطح الداخلي الأملس للكرة. أثبت أن أكبر عمق رأسي للجسيم أسفل مركز الكرة يساوي d حيث $V^2 d = 2g\left(a^2 - d^2\right)$ ثم أثبت أن الضغط على الكرة عند أية نقطة P يساوي $\frac{m\left(3v^2 - V^2\right)}{2a}$ حيث v السرعة عند P.

الحل

معادلات الحركة لجسيم يتحرك على السطح الداخلي الأملس لكرة نصف قطره a هي:



$$-ma(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2)=mg\cos\theta-R \qquad (1)$$

$$ma(\ddot{\theta}-\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)=-mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$\frac{m}{a\sin\theta}\frac{d}{dt}(a^2\sin^2\theta\dot{\phi})=0 \qquad (3)$$

وحيث أن عدد المعادلات يساوى عدد المجاهيل

وهم (R,θ,ϕ) فانه يوجد حل وحيد للمعادلات

$(1),(2),(3)$ وبتكامل (3) نحصل على :

$$a^2\sin^2\theta\dot{\phi}=c_1 \qquad (4)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة و هى عند $\theta=\frac{\pi}{2}$ كانت $a\sin\frac{\pi}{2}\dot{\phi}=V$

وبذلك نحصل على $aV=c_1$ وتصبح (4)على الصورة

$$\dot{\phi}=\frac{V}{a\sin^2\theta} \qquad (5)$$

وبالتعويض من (5)فى (2)نحصل على

$$\ddot{\theta}-\sin\theta\cos\theta\frac{V^2}{a^2\sin^4\theta}=\frac{-g}{a}\sin\theta \qquad (6)$$

المعادلة (6)يمكن كتابتها على الصورة

$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta}-\frac{V^2}{a^2}\sin^{-3}\theta\,d\sin\theta=\frac{-g}{a}\sin\theta\,d\theta \quad (7)$$

و بتكامل (7) نحصل على

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\frac{V^2}{2a^2\sin^2\theta}=\frac{g}{a}\cos\theta+c_2 \quad (8)$$

و حيث c_2 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة و هى عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ كانت $\dot{\theta} = 0$ أي أن

$c_2 = \dfrac{V^2}{2a^2}$ وبذلك تصبح (8) على الصورة

$$\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{a^2} + \frac{2g}{a}\cos\theta - \frac{V^2}{a^2 \sin^2\theta} \qquad (9)$$

و عندما يصل الجسيم إلى أكبر عمق رأسي d أسفل مركز الكرة فإن $\dot{\theta} = 0 \, , \cos\,\theta = \dfrac{d}{a}$

وبذلك تصبح (9)على الصورة

$0 = \frac{V^2}{a^2} - \frac{2g\,d}{a^2} - \frac{V^2}{a^2\left(1-\frac{d^2}{a^2}\right)}$ و منها نحصل على أن $V^2 d = 2g\left(a^2 - d^2\right)$

وحيث أن مربع سرعة جسيم يتحرك على السطح الداخلي الأملس لكرة نصف قطرها a عند أية نقطة P يعين من العلاقة

$$v^2 = a^2\dot{\theta}^2 + a^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 \qquad (10)$$

وبالتعويض من (9) ,(5) في (10) نحصل على

$$\cos\theta = \frac{v^2 - V^2}{2\,a\,g} \qquad (11)$$

وباستخدام (10) في (1) نحصل على

$$R = \frac{m\,v^2}{a} + mg\cos\theta \qquad (12)$$

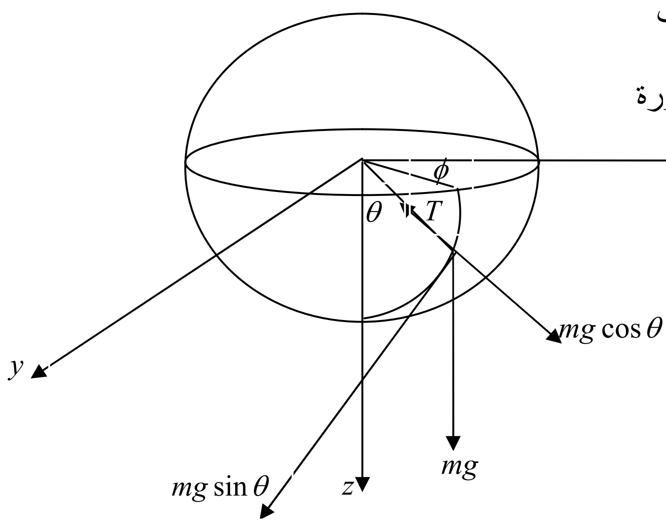
وبالتعويض من (11) في (12) نحصل على

$$R = \frac{m}{2\,a}\left(3\,v^2 - V^2\right) \qquad (13)$$

مثال:

علق جسيم كتلته m من أحد طرفي خيط خفيف غير مرن طرفه الآخر مربوط في نقطة ثابتة o . عندما كان الخيط مائلا على الرأسي بزاوية حادة قذف الجسيم في أي اتجاه. إذا ظل الخيط مشدودا أثناء الحركة أوجد مقدار الشد في الخيط عندما يصنع زاوية θ مع الرأسي إلى أسفل وكذلك أوجد شرط إرتخاء الخيط إذا كان $\cos^{-1}\frac{1}{3}, \cos^{-1}\frac{2}{3}$ هما أكبر وأقل قيمة للزاوية θ .

الحل



معادلات الحركة لجسيم معلق من أحد طرفي خيط خفيف غير مرن طرفه الآخر مثبت وطوله a وحركته محصورة بين مستويين أفقيين هي:

$$-ma(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) = mg\cos\theta - T \qquad (1)$$

$$ma(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) = -mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$\frac{m}{a\sin\theta}\frac{d}{dt}(a^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0 \qquad (3)$$

وبتكامل (3) نحصل على

$$a^2\sin^2\theta\dot{\phi} = c_1 (4)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة

و هى عند $\theta = \alpha$ كانت $a\sin\alpha\dot{\phi} = V_\circ$

وبذلك نحصل على $c_1 = a\sin\alpha V_\circ$ وتصبح (4)على الصورة

$$\dot{\phi} = \frac{V_\circ\sin\alpha}{a\sin^2\theta} \qquad (5)$$

وبالتعويض من (5)فى (2)نحصل على

$$\ddot{\theta}-\sin\theta\cos\theta\frac{V_\circ^2\sin^2\alpha}{a^2\sin^4\theta}=\frac{-g}{a}\sin\theta \qquad (6)$$

المعادلة (6)يمكن كتابتها على الصورة

$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta}-\frac{V_\circ^2\sin^2\alpha}{a^2}\sin^{-3}\theta\,d\sin\theta=\frac{-g}{a}\sin\theta\,d\theta \quad (7)$$

و بتكامل (7) نحصل على

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\frac{V^2}{2a^2\sin^2\theta}=\frac{g}{a}\cos\theta+c_2 \quad (8)$$

و حيث c_2 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة و هى عند $\theta=\alpha$ كانت $\dot{\theta}=0$ أي أن

$c_2=\dfrac{V_\circ^2}{2a^2}-\dfrac{g}{a}\cos\alpha$ وبذلك تصبح (8) على الصورة

$$\dot{\theta}^2=\frac{V_\circ^2}{a^2}-\frac{2g}{a}\cos\alpha+\frac{2g}{a}\cos\theta-\frac{V_\circ^2\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\theta} \qquad (9)$$

و حيث أنه عند $\cos\theta_1=\frac{1}{3},\cos\theta_2=\frac{2}{3}$ كانت $\dot{\theta}=0$ وبذلك تصبح (9)على الصورة

$$0=\frac{V_\circ^2}{a^2}-\frac{2g}{a}\cos\alpha+\frac{2g}{3a}-\frac{9V_\circ^2\sin^2\alpha}{8a^2} \quad (10)$$

$$0=\frac{V_\circ^2}{a^2}-\frac{2g}{a}\cos\alpha+\frac{4g}{3a}-\frac{9V_\circ^2\sin^2\alpha}{5a^2} \quad (11)$$

ومن المعادلتين (11) ,(10) نحصل على

$$\frac{V_\circ^2\sin^2\alpha}{a^2}=\frac{80g}{81a},\frac{V_\circ^2}{a^2}-\frac{2g}{a}\cos\alpha=\frac{4g}{9a},$$

وبذلك تصبح (9) على الصورة

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{9a} + \frac{2g}{a}\cos\theta - \frac{80\,g}{81\,a\sin^2\theta} \qquad (12)$$

وبذلك نحصل على مقدار الشد في الخيط عندما يصنع زاوية θ مع الرأسي لأسفل على الصورة

$$T = \frac{4mg}{9} + 3mg\cos\theta \qquad (13)$$

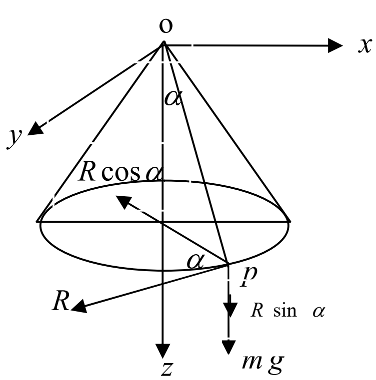
ويرتخي الخيط عندما $T = 0$ أي عندما $\cos\theta = \frac{-4}{27}$

مثال

قذف جسيم بسرعة أفقية V من نقطة P_0 على السطح الداخلي الأملس لمخروط دائري قائم مثبت بحيث يكون محوره رأسيا ورأسه o إلى أعلى. أوجد ضغط الجسيم عند أي موضع P بدلالة عمق P أسفل o ثم أوجد الموضع الذي يترك عنده الجسيم سطح المخروط.

الحل

معادلات الحركة لجسيم يتحرك على السطح الداخلي الأملس لمخروط أجوف في الإحداثيات الإسطوانية هي:



$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -R\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0 \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = mg + R\sin\alpha \qquad (3)$$

ومن هندسة الشكل نجد أن

$$\rho = z\tan\alpha \qquad (4)$$

وحيث أن عدد المعادلات يساوى عدد المجاهيل وهم (ρ,ϕ,z,R)

فانه يوجد حل وحيد للمعادلات (1), (2), (3),(4) وبتكامل (2) نحصل على :

$$\rho^2\dot{\phi} = c_1 \qquad (5)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة و هى عند $\rho = \rho_\circ$ كانت $\rho \dot{\phi} = V$ وبذلك

نحصل على $c_1 = z_\circ \tan\alpha$ وتصبح (5)على الصورة

$$\dot{\phi} = \frac{V z_\circ}{z^2 \tan\alpha} \tag{6}$$

وبتفاضل المعادلة (4) مرتين بالنسبة للزمن نحصل على

$$(7)\ \ \ddot{\rho} = \ddot{z} \tan\alpha$$

وبالتعويض من (7) ,(6) في (1) نحصل على

$$m(\ddot{z} \tan\alpha - \frac{V^2 z_\circ^2}{z^3 \tan\alpha}) = -R \cos\alpha \tag{8}$$

وبالتعويض من (3) في (8) نحصل على

$$R = \frac{m V^2 z_\circ^2 \cos^2\alpha}{z^3 \sin\alpha} - m g \sin\alpha \tag{9}$$

الجسيم يترك السطح عندما $R = 0$ ومن (9) نحصل على $z = \left(\frac{V^2 z_\circ^2}{g \tan^2\alpha}\right)^{1/3}$

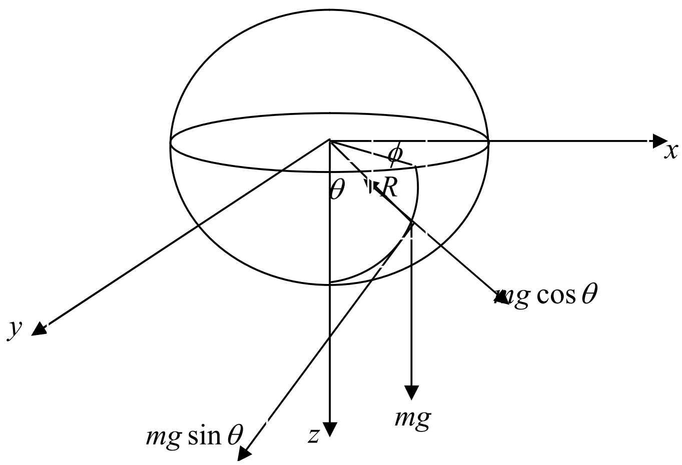
<u>مثال 4</u>

يتحرك جسيم على السطح الداخلي الأملس لكره مثبتة نصف قطرها a ومركزها o إذا قذف الجسيم من نقطه بعدها الراسي أسفل o يساوى $Z_\circ$ بسرعة أفقية مقدارها $\sqrt{2gh}$ برهن أن الجسيم يتحرك بين دائرتين أفقيتين عمقا مستواهما أسفل o يساويان Z_1, Z_2 حيث Z_1, Z_2 يحققان المعادلة التالية: $Z_1^2 + Z_1 Z_2 + Z_2^2 + (h - Z_\circ)(Z_1 + Z_2) = a^2$.

<u>الحل</u>

معادلات الحركة لجسيم يتحرك على السطح الداخلي الأملس لكرة

نصف قطره a هي:



$$-ma(\dot\theta^2+\sin^2\theta\,\dot\phi^2)=mg\cos\theta-R \quad (1)$$

$$ma(\ddot\theta-\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2)=-mg\sin\theta \quad (2)$$

$$\frac{m}{a\sin\theta}\frac{d}{dt}(a^2\sin^2\theta\,\dot\phi)=0 \quad (3)$$

حيث أن عدد المعادلات يساوى عدد المجاهيل

وهم (R,θ,ϕ) فانه يوجد حل وحيد للمعادلات

(1), (2), (3) وبتكامل (3) نحصل على :

$$a^2\sin^2\theta\,\dot\phi=c_1 \quad (4)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الابتدائية للحركة وهى

عند $\theta=\alpha$ كانت $a\sin\alpha\,\dot\phi=v_\circ$

ومنها نحصل على أن $c_1=a\,v_\circ\sin\alpha$ وبذلك نحصل من (4) على أن

$$\dot\phi=\frac{v_\circ\sin\alpha}{a\sin^2\theta} \quad (5)$$

وبالتعويض من (5) في (2) نحصل على :

$$\ddot\theta-\frac{v_\circ^2\sin^2\alpha\sin\theta\cos\theta}{a^2\sin^4\theta}=-\frac{g}{a}\sin\theta \quad (6)$$

والمعادلة (6) يمكن كتابتها على الصورة :

$$\dot\theta\,d\dot\theta-\frac{v_\circ^2\sin^2\phi}{a^2}\sin^{-3}\theta\,d\sin\theta=-\tfrac{g}{a}\sin\theta\,d\theta \quad (7)$$

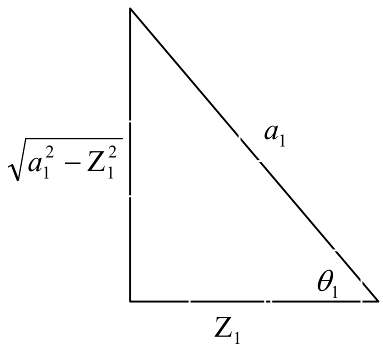
وبتكامل (7) نحصل على :

$$\tfrac{1}{2}\dot\theta^2+\frac{v_\circ^2\sin^2\phi}{2a^2\sin^2\theta}=\frac{g}{a}\cos\theta+c_2 \quad (8)$$

حيث c_2 ثابت يعين من الشروط الابتدائية للحركة وهى عند $\theta=\alpha$ كانت $\dot{\theta}=0$ ومنها نحصل

على أن $c_2=\frac{v_\circ^2}{2a^2}-\frac{g}{a}\cos\alpha$ وبذلك تصبح (8)على الصورة

$$\dot{\theta}^2=\frac{v_o^2}{a^2}-\frac{2g}{a}\cos\alpha+\frac{2g}{a}\cos\theta-\frac{v_o^2\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\theta} \qquad (9)$$



حيث انه عند نهايات الحركة تكون $\dot{\theta}=0$ فان $\dot{\theta}=0$ عند $\theta=\theta_1$

$\dot{\theta}=0$ عند $\theta=\theta_2$

حيث $\cos\theta_1=\frac{Z_1}{a}$ & $\cos\theta_2=\frac{Z_2}{a}$

$$0=\frac{v_o^2}{a^2}-\frac{2g}{a}\cos\alpha+\frac{2g}{a}\cos\theta_1-\frac{v_o^2\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\theta_1}$$

$$0=\frac{2gh}{a^2}-\frac{2gZ_o}{a^2}+\frac{2gZ_1}{a^2}-\frac{2gh(a^2-Z_o^2)}{a^2(a^2-Z_1^2)}$$

$$0=h-Z_o+Z_1-\frac{h(a^2-Z_o^2)}{(a^2-Z_1^2)}$$

بضرب المعادله فى $(a^2-Z_1^2)$

$$0=h(a^2-Z_1^2)-Z_o(a^2-Z_1^2)+Z_1(a^2-Z_1^2)-h(a^2-Z_o^2)$$

$$0=ha^2-hZ_1^2-a^2Z_o+Z_oZ_1^2+a^2Z_1+Z_1^3-ha^2+hZ_o^2) \qquad (10)$$

$$0=Z_1^3+(h-Z_o)Z_1^2-a^2Z_1-hZ_o^2+a^2Z_o$$

وبالمثل يكون :

$$0=Z_2^3+(h-Z_o)Z_2^2-a^2Z_2-hZ_o^2+a^2Z_o \qquad (11)$$

وبمساواة (11) ,(10) نحصل على

$$(Z_2 - Z_1)(Z_2^2 + Z_1 Z_2 + Z_1^2) + (h - Z_o)(Z_2 - Z_1)(Z_2 + Z_1) - a^2 (Z_2 - Z_1) = 0$$

$$\# \qquad (Z_2^2 + Z_1 Z_2 + Z_1^2) + (h - Z_o)(Z_2 + Z_1) = a^2$$

مثال:

علق جسيم كتلته m من أحد طرفي خيط خفيف غير مرن طرفه الآخر مربوط في نقطة ثابتة o . عندما كان الخيط مائلا على الرأسي بزاوية حادة قذف الجسيم في أي اتجاه. إذا ظل الخيط مشدودا أثناء الحركة برهن أن مقدار الشد في الخيط عندما يصنع زاوية θ مع الرأسي إلى أسفل يساوي $mg\left[3\cos\theta - \frac{2\left(\cos^2\alpha + \cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta - 1\right)}{\cos\alpha + \cos\beta}\right]$ حيث β,α هما أكبر وأقل قيمة للزاوية θ.

الحل

معادلات الحركة لجسيم معلق من أحد طرفي

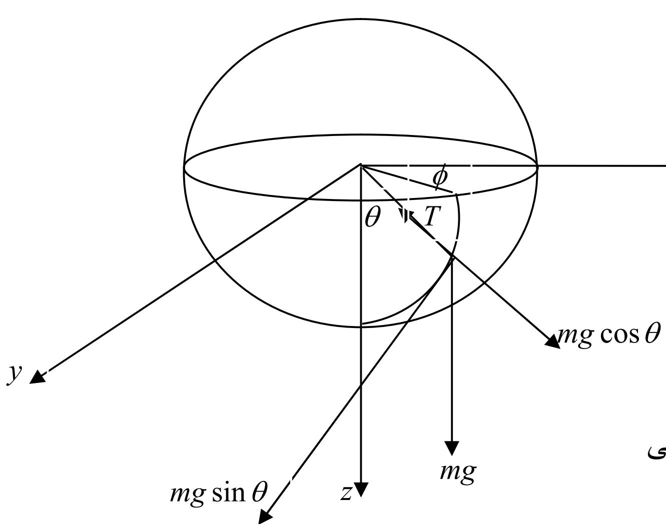
خيط خفيف غير مرن طرفه الآخر مثبت

وطوله a وحركته محصورة بين مستويين أفقيين هي:

$$-ma(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) = mg\cos\theta - T \quad (1)$$

$$ma(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) = -mg\sin\theta \quad (2)$$

$$\frac{m}{a\sin\theta}\frac{d}{dt}(a^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0 \quad (3)$$



وبتكامل (3) نحصل على

$$a^2\sin^2\theta\dot{\phi} = c_1 \quad (4)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة و هى

عند $\theta = \beta$ كانت $a\sin\beta\dot{\phi} = V_\circ$ وبذلك نحصل على

وتصبح (4)على الصورة $c_1 = V_\circ a \sin\beta$

$$\dot{\phi} = \frac{V_\circ \sin\beta}{a \sin^2\theta} \qquad (5)$$

وبالتعويض من (5)فى (2)نحصل على

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta \frac{V_\circ^2 \sin^2\beta}{a^2 \sin^4\theta} = \frac{-g}{a}\sin\theta \qquad (6)$$

المعادلة (6)يمكن كتابتها على الصورة

$$\dot{\theta}\, d\dot{\theta} - \frac{V_\circ^2 \sin^2\beta}{a^2} \sin^{-3}\theta\, d\sin\theta = \frac{-g}{a}\sin\theta\, d\theta \quad (7)$$

و بتكامل (7) نحصل على

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{V_\circ^2 \sin^2\beta}{2a^2 \sin^2\theta} = \frac{g}{a}\cos\theta + c_2 \quad (8)$$

و حيث c_2 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة و هى عند $\theta = \beta$ كانت $\dot{\theta} = 0$ أي أن

وبذلك تصبح (8) على الصورة $c_2 = \frac{V_\circ^2}{2a^2} - \frac{g}{a}\cos\beta$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{V_\circ^2}{a^2 \sin^2\theta}\left(\sin^2\theta - \sin^2\beta\right) - \frac{2g}{a}\left(\cos\theta - \cos\beta\right) \qquad (9)$$

و حيث أنه عند نهايات الحركة تكون $\dot{\theta} = 0$ فإن $\dot{\theta} = 0$ عندما $\theta = \alpha$ وبذلك نحصل من (9)على

$$V_\circ^2 = \frac{2\,a\,g \sin^2\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta}$$

وبذلك تصبح (9) على الصورة

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}\left(\cos\theta - \cos\beta\right)\left[1 - \frac{\sin^2\alpha\left(\cos\theta + \cos\beta\right)}{\sin^2\theta\left(\cos\alpha + \cos\beta\right)}\right] \qquad (10)$$

وبالتعويض من (10) ,(5) في (1) نحصل على

$$T = mg\left[3\cos\theta - \frac{2\left(\cos^2\alpha + \cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta - 1\right)}{\cos\alpha + \cos\beta}\right]$$

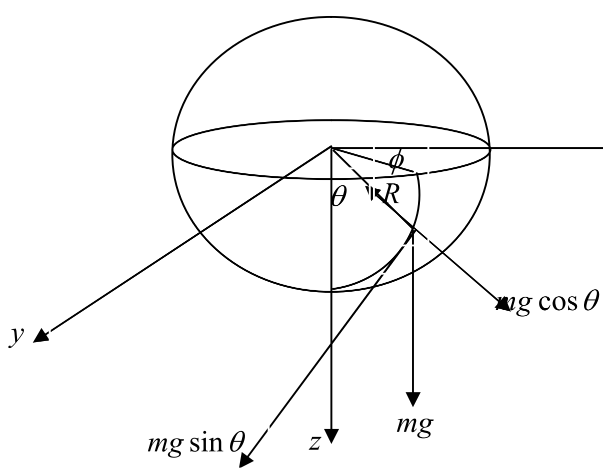
<u>**مثال**</u>

يتحرك جسيم على السطح الداخلي لكرة جوفاء ملساء نصف قطرها a. إذا كانت الحركة تنحصر بين المستويين $\frac{a}{4}$ فوق مستوى المركز، $\frac{a}{2}$ أسفل مستوى المركز. أثبت أن رد فعل السطح على الجسيم عند أسفل نقطة في المسار تساوي $8mg$ وأن سرعة الجسيم عند مستوى المركز تساوي $\sqrt{\frac{13}{2}ag}$.

<u>**الحل**</u>

معادلات الحركة لجسيم يتحرك على السطح الداخلي الأملس لكرة

نصف قطره a هي:



$$-ma(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) = mg\cos\theta - R \qquad (1)$$

$$ma(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2) = -mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$\frac{m}{a\sin\theta}\frac{d}{dt}(a^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}) = 0 \qquad (3)$$

وحيث أن عدد المعادلات يساوى عدد المجاهيل

وهم (R,θ,ϕ) فانه يوجد حل وحيد للمعادلات (3) ,(2) ,(1)

وبتكامل (3) نحصل على :

$$a^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = c_1 \quad (4)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة و هى عند $\theta = \theta_1$ كانت $a\sin\theta_1\,\dot{\phi} = V_\circ$

وبذلك نحصل على $V_\circ a\sin\theta_1 = c_1$ وتصبح (4)على الصورة

$$\dot{\phi} = \frac{V_\circ \sin\theta_1}{a\sin^2\theta} \qquad (5)$$

وبالتعويض من (5)فى (2)نحصل على

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\frac{V_\circ^2 \sin^2\theta_1}{a^2\sin^4\theta} = \frac{-g}{a}\sin\theta \qquad (6)$$

المعادلة (6)يمكن كتابتها على الصورة

$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta} - \frac{V_\circ^2\sin^2\theta_1}{a^2}\sin^{-3}\theta\,d\sin\theta = \frac{-g}{a}\sin\theta\,d\theta \qquad (7)$$

و بتكامل (7) نحصل على المعادلة التالية

$$\tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{V_\circ^2\sin^2\theta_1}{2a^2\sin^2\theta} = \frac{g}{a}\cos\theta + c_2 \qquad (8)$$

و حيث c_2 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة و هى عند $\theta = \theta_1$ كانت $\dot{\theta} = 0$ أي أن

$c_2 = \dfrac{V_\circ^2}{2a^2} - \dfrac{g}{a}\cos\theta_1$ وبذلك تصبح (8) على الصورة التالية

$$\dot{\theta}^2 = \frac{V_\circ^2}{a^2}\left(1 - \frac{\sin^2\theta_1}{\sin^2\theta}\right) + \frac{2g}{a}\left(\cos\theta - \cos\theta_1\right) \qquad (9)$$

وحيث أنه عند $\theta = \theta_2$ حيث $\cos\theta_2 = \frac{-a/4}{a} = -\frac{1}{4}$ كانت $\dot{\theta} = 0$ وبذلك نحصل من (9) على أن

$V_\circ^2 = \frac{15ag}{2}$ وبذلك تصبح المعادلتان (9) ,(5) على الصورتين التاليتين

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{\frac{15ag}{2}}\sin\theta_1}{a\sin^2\theta} \qquad (10)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{15ag}{2a^2}\left(1 - \frac{\sin^2\theta_1}{\sin^2\theta}\right) + \frac{2g}{a}\left(\cos\theta - \cos\theta_1\right) \qquad (11)$$

وبالتعويض من (11) ,(10) في (1) نحصل على

$$R = mg\cos\theta + 2mg\left(\cos\theta - \cos\theta_1\right) + 15mg/2 \qquad (12)$$

وحيث أنه عند أسفل نقطة في المسار تكون $\theta = \theta_1$ ويكون $\cos\theta_1 = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$ فإن رد فعل السطح على الجسيم عند أسفل نقطة في المسار هو

$$R = 8mg \qquad (13)$$

وحيث أن مربع سرعة جسيم يتحرك على السطح الداخلي الأملس لكرة نصف قطرها a عند أية نقطة P يعين من العلاقة

$$v^2 = a^2\dot{\theta}^2 + a^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 \qquad (14)$$

فإن مربع سرعة جسيم يتحرك على السطح الداخلي الأملس لكرة نصف قطرها a عند مستوى المركز أي عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ يكون

$$v^2\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 13ag/2 \Rightarrow v\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{13ag/2} \qquad (15)$$