م ٩١٨ ٤٠٤٠ج٠ احصاء وحاسبة } توبولوجي
٤٠٤٠ت٠أ٠ رياضيات

-١-

مسلمات الفصل

تعريف: نفرض (X, τ) - فراغ توبولوجي. فإن

١- الفراغ (X, τ) يسمى فراغ T_0 اذا وفقط اذا كان لكل $x, y \in X$ و $x \neq y$ يوجد إما فئة مفتوحة تحتوي x ولا تحتوي y او فئة مفتوحة تحتوي y ولا تحتوي x.

2- الفراغ (X, τ) يسمى فراغ T_1 إذا كان لكل $x, y \in X$ و $x \neq y$ يوجد فئة مفتوحة تحتوي x ولا تحتوي y وفئة مفتوحة تحتوي y ولا تحتوي x.

3- الفراغ (X, τ) يسمى فراغ T_2 أو فراغ هوسدورف إذا كان لكل نقطتين مختلفتين $x, y \in X$ يوجد فئات مفتوحة U, V بحيث $x \in U, y \in V$ and $U \cap V = \phi$

4- الفراغ (X, τ) يسمى منتظم اذا كان لكل فئة مغلقة $F \subset X$ ولكل نقطة $x \notin F$ يوجد فئات مفتوحة U, V بحيث $F \subset V$ ، $x \in U$ و $U \cap V = \phi$.

الفراغ المنتظم و T_1 يسمى فراغ T_3

5- الفراغ (X, τ) يسمى فراغ اعتيادي اذا كان وفقط اذا كان لكل فئتين مغلقتين وغير متقاطعتين F_1, F_2 يوجد فئتين مفتوحتين U, V بحيث: $F_1 \subset U$ ، $F_2 \subset V$ و $U \cap V = \phi$.

الفراغ الاعتيادي و T_1 يسمى فراغ T_4.

من تعريف فرضيات الفصل T_0, T_1, T_2 نجد ان
اي فراغ T_2 هو فراغ T_1 والذي سيكون T_0

ولا توجد علاقة بين كون الفراغ منتظم او اعتيادي
وبين كون الفراغ T_4 يؤدي الى انه T_3

<u>مثال</u>: نفرض ان $(X=\{a,b,c\}, \tau=\{X,\phi,\{a\}\})$
هذا الفراغ ليس T_0 لانه على سبيل المثال
للنقطتين b,c لا يوجد جوار لـ b لا يحوي c
او جوار لـ c لا يحوي b لان الجوار الوحيد
لكل من b,c هو X.
الفراغ اعتيادي لان $\tau^c=\{X,\phi,\{b,c\}\}$
ولا توجد فئات مغلقة غير متقاطعة.
ولكنه ليس منتظم لان للفئة المغلقة $F=\{b,c\}$
والنقطة $a\notin F$ لا يوجد فئات مفتوحة
غير متقاطعة U,V حيث $a\in U, F\subset V$.
عند اخذ τ توبولوجي على X بالشكل
$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$
نجد أن (X,τ) يحقق فرضية الفصل T_0
ولكنه ليس T_1 (وضح)
ايضا (X,τ) اعتيادي وليس منتظم
اوجد τ^c وتحقق من ذلك.

عند اخذ $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ على X
نجد ان $\tau=\tau^c$
والفراغ (X,τ) اعتيادي ومنتظم
ولكنه ليس T_0 (تأكد من ان الفرضية T_0
لا تتحقق في حالة النقطتين b,c.

٣٤٠ ع العصا… مقرر توبولوجي
٢٠٠٩ ٢٠٠٤ …

-3-

<u>مثال</u>: صنف الفراغات التالية من حيث كونها تحقق أي من مسلمات الفصل T_0, T_1, T_2 وكذلك من حيث كونه منتظم أو اعتيادي:

(i) $(\mathbb{R}, \tau_r)$ (ii) $(\mathbb{R}, \tau_\infty)$ و (iii) $(\mathbb{R}, \tau_c)$

الحل: (i) في $(\mathbb{R}, \tau_r)$ نجد أنه لأي $x, y \in \mathbb{R}$، $x \neq y$ بحيث $y > x$ للتحديد فإنه يوجد جوار لـ x لا يحتوي y ولكن أي جوار لـ y يحتوي x لذلك الفراغ T_0 وليس T_1، وبالتالي ليس T_2.

نبحث كونه منتظم أو اعتيادي، نعلم أن عائلة الفئات المغلقة

$$\tau_r^c = \{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \phi\}$$

لذلك لا توجد فئات مغلقة غير خالية وغير متقاطعة لذلك هو فراغ اعتيادي لكنه ليس منتظم لأنه على سبيل المثال $F = [2,\infty)$ و $x = 1$، $x \notin F$ ولكن الفئة المفتوحة الوحيدة التي تحتوي F هي $\mathbb{R}$ تحتوي x.

(ii) $(\mathbb{R}, \tau_\infty)$ فراغ T_1 لأنه لأي $x, y \in \mathbb{R}$، $x \neq y$ يكفي أن نأخذ جوار لـ x بالشكل $\mathbb{R}\setminus\{y\}$ لا يحتوي y، وجوار لـ y بالشكل $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ لا يحتوي x.

$(\mathbb{R}, \tau_\infty)$ ليس T_2 لأنه لأي فئتين U, V غير خاليتين مفتوحتين في $(\mathbb{R}, \tau_\infty)$ نجد أن $U \cap V \neq \phi$.

اشرح لماذا؟
وهو كذلك الشيء ليس منتظم وليس اعتيادي

مرحلة ٣ ع٤: احصاء - حاسبات } توبولوجي
٤ . ٢٠١٠

(iii) (R, τ_u) فضاء T_2 وكذلك T_3 ، T_4

نكتفي باثبات انه فضاء T_2

نفرض ان $x, y \in R$ و $x \neq y$ ونفرض ان المسافة بين x, y هي العدد الموجب ε.

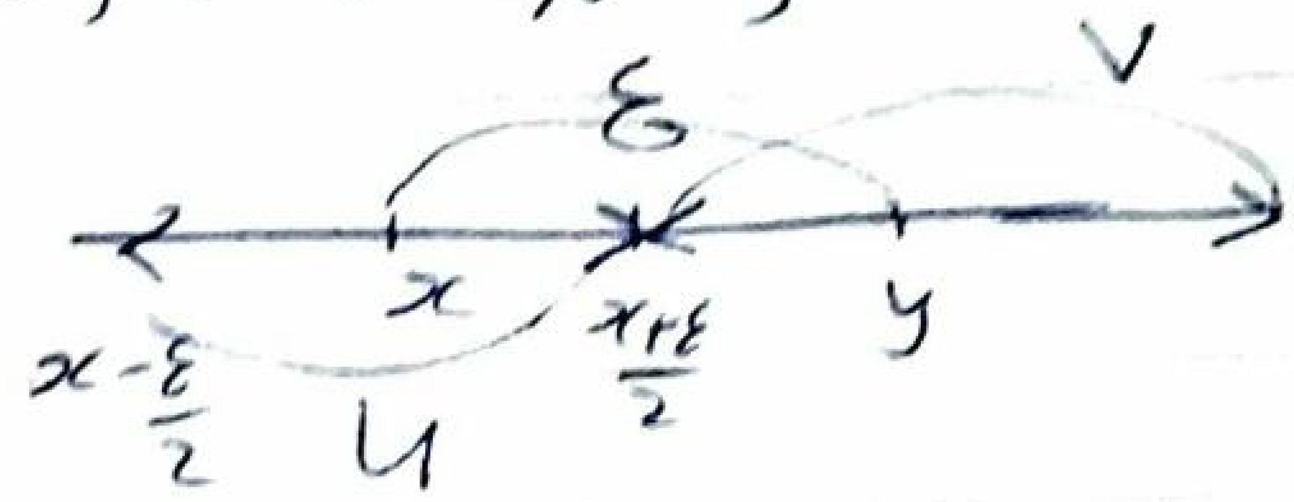
نأخذ

$$U = \left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$
$$V = \left(y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

نجد ان

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U, V \in \tau_u,$$

$$U \cap V = \varphi.$$



نظرية: نفرض ان (X, τ) فضاء توبولوجي فان X - فضاء T_1 $\Longleftrightarrow$ $\{x\}$ مغلقة لكل $x \in X$

البرهان: انظر الكتاب

من النظرية اعلاه نجد ان X منتهية و τ توبولوجي عليها. اذا كان (X, τ) فضاء T_1 فان $\tau = P^X$

والعكس (X, P^X) لان X منتهية فضاء T_1.

انظر الكتاب

نظرية: نفرض ان (X, τ) فضاء توبولوجي وان $A \subset X$.

اذا كان X يحقق احدى فرضيات الفصل T_i حيث $0 \leq i \leq 3$ فان A كفضاء جزئي يحقق نفس الفرضية.

(في هذه الحالة نقول ان فرضيات الفصل T_0, T_1, T_2, T_3 صفات وراثية.)

الاثبات انظر الكتاب

م ٣٨ ٤ ع. احصاء . حاسبات
٢٠٢٠/٤/٥

- ٥ - توبولوجي

تمرينات لفصل الكتاب
حل ١٨ ، ٦ ص ١١٢ ، ٢ ص ١١٩ .

بالاضافة الى

١- اعط مثال لفراغ T_0 وليس T_1 ، وآخر T_1 وليس T_2 ، وثالث فراغ T_2 بخلاف الامثلة المذكورة .

٢- نفرض ان A مجموعة جزئية من فراغ T_1 - (X,τ) اثبت ان $x \in X$ تكون نقطة تراكم لـ A اذا وفقط اذا كان اي مجموعة مفتوحة تحوي x تحتوي على عدد لانهائي من عناصر A .

٣- اذا كان (X,τ) فراغ T_1 . اثبت انه لأي مجموعة جزئية لا توجد نقاط تراكم .

٤- في الفراغ T_1 ولأي A مجموعة جزئية اثبت ان A' مجموعة مغلقة باثبات ان المكملة مجموعة مفتوحة .

٥- اذا كان (X,τ) فراغ T_2 وكان τ_1 توبولوجي على X حيث $\tau \subset \tau_1$ اثبت ان (X,τ_1) فراغ T_2 ايضا .