المحاضرة التاسعة

معادلات تفاضلية عادية (208 ر)

المستوى الثانى (علوم الحاسب - الرياضيات - الفيزياء – الجيوفيزياء)

تحويلات لابلاس Laplace Transforms

(1-5) مقدمة:

من دراستنا السابقة للتكاملات المعتلة في الصف الأول نجد أن

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

مثال (1):

احسب قيمة

$$\int_0^{\infty} e^{sx}dx$$

حيث s بارامتر

الحـل

$$\int_0^{\infty} e^{sx}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{sx}dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{s}\left[e^{sx}\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\left(e^{sb}-1\right)$$

وعلى ذلك يكون التكامل تقاربي إذا كانت $s<0$ وتباعدي إذا كانت $s>0$.

(2-5) تحويلات لابلاس:

تعريف:

يعرف تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ بأنه

$$L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = F(s)$$

حيث s بارامتر، $L\{.\}$ هو مؤثر لابلاس

واضح أن نتيجة التكامل النهائية تعتمد على s فقط وهذا إذا كان التكامل تقاربي.

والآن سوف نعطي الشرط الكافي لكي يكون للدالة تحويل لابلاس.

نظرية:

نفرض أن $f(x)$ هي دالة piece wise continuous وذلك في الفترة $[0, \infty)$ كذلك نفرض أن $f(x) \le k\, e^{ax}$ حيث k ثابت موجب، a ثابت حقيقي. فإن الدالة $f(x)$ قابلة لتحويلات لابلاس، أي أنه يمكن حساب تحويل لابلاس لهذه الدالة (أي أن التكامل تقاربي) ويعطى من العلاقة

$$L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

البرهان:

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \le k\int_0^\infty e^{-sx} e^{ax}dx$$

$$= \int_0^\infty e^{(a-s)x}dx$$

$$= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)x}\Big|_0^\infty$$

ويكون التكامل تقاربي إذا كانت $s > a$.

أمثلة:

يلاحظ أن الدوال الآتية هي من درجة الدالة ke^{ax}.

$$x^n, \quad \sin x, \quad xe^{bx}$$

الحـل

$$\text{(i)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{mx}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{m^n e^{mx}} = 0$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{e^{mx}} = 0$$

$$\text{(iii)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{bx}}{e^{mx}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{(m-b)x}} \to 0 \ \textit{if}\ \ m > b$$

في جميع الأمثلة السابقة يمكن إيجاد k, a بحيث تكون $f(x) \le k\, e^{ax}$.

مثال (2):

الدالة e^{x^2} ليست من درجة e^{mx}

الحـل

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{mx}}=\lim_{x\to\infty}e^{(x-m)x}$$

يلاحظ أنه لي اختيار m فإن x تكون أكبر منها وعلى ذلك فإن النهاية تؤول إلى ∞.

الآن سوف نبدأ بإيجاد تحويلات لابلاس لبعض الدوال المشهورة.

مثال (3):

إذا كانت

$$f(x)=1$$

فإن

$$F(s)=L\{1\}=\int_0^\infty e^{-sx}dx=\frac{1}{s}; \qquad s>0$$

مثال (4):

إذا كانت

$$f(x)=x$$

فإن

$$F(s)=L\{x\}=\int_0^\infty xe^{-sx}dx$$

$$=-\frac{1}{s}\int_0^\infty xd\left(e^{-sx}\right)$$

$$=-\frac{1}{s}xe^{-sx}\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}dx$$

$$=zero-\frac{1}{s^2}e^{-sx}\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{1}{s^2}$$

مثال (5):

باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أثبت أن:

$$F(s)=L\{x^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

حيث n صحيح موجب. (يترك للطالب)

مثال (6):

إذا كانت

$$f(x)=e^{ax}$$

حيث a ثابت

$$F(s)=L\{e^{ax}\}=\int_0^\infty e^{ax}e^{-sx}dx$$

$$=-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)x}\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{1}{s-a} \qquad ; s>a$$

مثال (7):

أثبت أن $L\{.\}$ مؤثر خطي أي أن:

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\}$$

الحـل

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = \int_0^\infty (c_1 f_1 + c_2 f_2) e^{-sx} dx$$

$$= c_1 \int_0^\infty f_1(x) e^{-sx} dx + c_2 \int_0^\infty f_2(x) e^{-sx} dx$$

$$= c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\}$$

وهو المطلوب

مثال (8):

إذا كانت

$$f(x) = \sinh bx$$

فإن

$$L\{\sinh bx\} = L\left\{\frac{1}{2}\left(e^{bx} - e^{-bx}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(L\{e^{bx}\} - L\{e^{-bx}\}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b}\right)$$

$$= \frac{b}{s^2 - b^2}$$

مثال (9):

إذا كانت

$$f(x) = \cos bx$$

فإن

$$F(s) = L\{\cos bx\} = \int_0^\infty \cos bx \, e^{-sx} dx$$

$$= -\frac{1}{s}\int_0^\infty \cos bx \, d\left(e^{-sx}\right)$$

$$= -\frac{1}{s}\cos bx \, e^{-sx} - \frac{b}{s}\int_0^\infty \sin bx \, e^{-sx} dx$$

$$= -\frac{1}{s} + \frac{b}{s^2}\int \sin bx \, d\left(e^{-sx}\right)$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{b}{s^2}\sin bx \, e^{-sx}\Big|_0^\infty - \frac{b^2}{s^2}\int_0^\infty \cos bx \, e^{-sx} dx$$

$$F(s) = -\frac{b^2}{s^2}F(s) + \frac{1}{s}$$

$$\therefore \; F(s) = \frac{s}{b^2 + s^2}$$

ملاحظة:

يلاحظ أن النظرية السابقة تعطي الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس.

مثال (10):

الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ هي ليست p-c في الفترة [0, ∞] ولكن يوجد لها تحول لابلاس

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}x^{\frac{-1}{2}}dx = L\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$$

نفرض أن

$$\sqrt{sx}=t \qquad \Rightarrow \qquad dx=\frac{2}{s}t\,dt$$

$$F(s)=\frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{s}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

مثال (11):

الدالة $f(x)=x^p$ حيث $-1<p<0$ ليست P-C ولكن لها تحويل لابلاس لأن

$$F(s)=L\left\{x^p\right\}=\int_0^\infty e^{-sx}x^p dx$$

نفرض أن

$$s\,x=t \qquad \Rightarrow \qquad dx=\frac{dt}{s}$$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{s}\right)^n\frac{dt}{s}=\frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty t^p e^{-t}dt$$

ومن تعريف دالة

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty t^p e^{-t}dt$$

$$\therefore\ F(s)=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$$

مثال (12):

إذا كانت $f(x)=x^p$ حيث p عدد قياسي موجب

$$F(s)=L\left\{x^p\right\}=\int_0^\infty x^p e^{-sx}dx$$

بوضع

$$s\,x=t \qquad \Rightarrow \qquad dx=\frac{dt}{s}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty t^p e^{-t}dt=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$$

من مثال (10)، (11) يكون

$$L\left\{x^p\right\}=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \qquad ; s>0$$

حيث p عدد قياسي موجب أكبر من 1- .

مثال (13):

احسب تحويلات لابلاس للدالة $f'(x)$

الحـل

$$F(s) = L\{f'(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} df(x)$$

$$= \left.\frac{f(x)}{e^{sx}}\right|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$= 0 - f(0) + sF(s)$$

$$= sF(s) - f(0)$$

مثال (14):

احسب تحويلات لابلاس للدالة $f''(x)$

الحـل

$$L\{f''(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} d\left(f'(x)\right)$$

$$= e^{-sx} f'(x)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx$$

$$= 0 - f'(0) + sL\{f'(x)\}$$

$$= - f'(0) + s\,[s\,F(s) - f(0)]$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

ويمكن باستخدام الاستنتاج الرياضي إثبات أن:

$$L\left\{f^{(n)}(x)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

مثال (15):

احسب تحويل لابلاس للتكامل

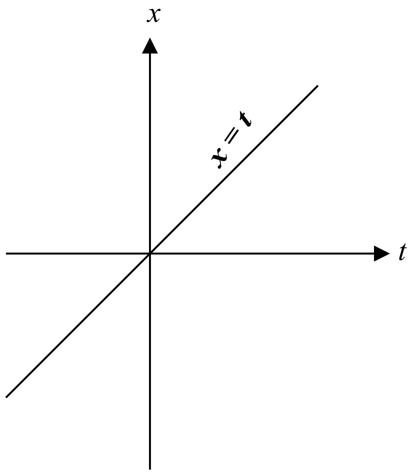
$$\int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

الحـل

$$L\left\{\int_0^x f(t)g(x-t)dt\right\} = \int_0^\infty e^{-sx}dx\int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

$$= \int_0^\infty\int_0^x e^{-sx} f(t)g(x-t)dt\,dx$$

وبعكس ترتيب التكامل يكون



$$= \int_{t=0}^{\infty} f(t)dt \int_{x=t}^{x=\infty} g(x-t)e^{-sx}dx$$

نفرض أن:

$u = x - t$ (في التكامل الداخلي)

$$\therefore\ du = dx$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} f(t)dt \int_{u=0}^{u=\infty} g(u)e^{-s(u+t)}du$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \int_{u=0}^{u=\infty} g(u)e^{-su}du$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}G(s)dt$$

$$= G(s)\int_{t=0}^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

$$= G(s)\ F(s)$$

حيث

$$L\{g(x)\} = G(s), \qquad L\{f(x)\} = F(s)$$

مثال (16):

أثبت أن

$$L\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

لحـل

نفرض أن:

$$G(x) = \int_0^x f(t)dt$$

ومنها

$$G'(x) = \frac{dG}{dx} = f(x), \qquad G(0) = 0$$

وبأخذ مؤثر لابلاس للطرفين يكون

$$\therefore\ L\{G'(x)\} = L\{f(x)\}$$

$$\therefore\ sL\{G(x)\} - G(0) = F(s)$$

$$\therefore\ sL\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} - 0 = F(s)$$

$$\therefore\ L\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

وهو المطلوب

مثال (17):

أثبت أن

$$l\left\{\int_0^x \int_0^t f(u)du\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s^2}$$

الحـل

نفرض أن

$$G(x)=\int_0^x\int_0^t f(u)\,du\,dt$$

$$\therefore\ G'(x)=\frac{dG}{dx}=\int_0^x f(u)\,du$$

$$G''(x)=f(x),\qquad G(0)=G'(0)=0$$

وبأخذ مؤثر لابلاس للطرفين يكون

$$L\{G''(x)\}=L\{f(x)\}$$

$$\therefore\ s^2L\{G(x)\}-sG(0)-G'(0)=F(s)$$

$$\therefore\ s^2L\{G(x)\}-0-0=F(s)$$

$$\therefore\ L\left\{\int_0^x\int_0^t f(u)\,du\,dt\right\}=\frac{F(s)}{s^2}$$

مثال (18):

أثبت أنه لأي عدد صحيح غير سالب n يكون:

$$L\{x^n f(x)\}=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

حيث

$$L\{f(x)\}=F(s)$$

الحـل

$$\frac{d^nF(s)}{ds^n}=\frac{d^n}{ds^n}\left[\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx\right]$$

$$=\int_0^\infty\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(e^{-sx}f(x)\,dx\right)$$

$$=(-1)^n\int_0^\infty x^n f(x)\,dx$$

$$=(-1)^n L\{x^n f(x)\}$$

وهو المطلوب.

مثال (19):

باستخدام القاعدة في المثال السابق حيث $n=2$ يكون

$$L\{x^2\sin bx\}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{b}{s^2+a^2}\right)$$

$$=\frac{a^2-3s^2}{(s^2+a^2)^3}$$

No	$f(x)=L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=L\{f(x)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$; $s>0$
2	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$; $s>a$
3	x^n, n صحيح موجب	$\frac{n!}{s^{n+1}}$; $s>a$
4	x^p , p عدد قياسي أكبر من سالب واحد	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$; $s>0$
5	$\sin bx$	$\frac{b}{s^2+b^2}$; $s>0$
6	$\cos bx$	$\frac{s}{s^2+b^2}$; $s>0$
7	$\sinh bx$	$\frac{b}{s^2-b^2}$; $s>0$
8	$\cosh bx$	$\frac{s}{s^2-b^2}$; $s>0$
9	$e^{ax}\sin bx$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$; $s>a$
10	$e^{ax}\cos bx$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$; $s>a$
11	$e^{ax}\sinh bx$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$; $s>a$
12	$e^{ax}\cosh bx$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$; $s>a$
13	$x^n e^{ax}$ n صحيح موجب	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$; $s>a$
14	$e^{ax}f(x)$	$F(s-a)$
15	$f(ax)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$; $a>0$
16	$\int_0^x f(x-t)g(t)dt$ or $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$	$F(s)G(s)$
17	$(-x)^n f(x)$, n صحيح موجب	$F^{(n)}(s)$
18	$f^{(n)}(x)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)$ $-s^{n-2}f'(0)-\ldots$ $-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
19	$\int_0^x f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$; $s>0$
20	$\int_0^x\int_0^t f(u)dudt$	$\frac{F(s)}{s^2}$; $s>0$