المحاضرة العاشرة

معادلات تفاضلية عادية (208 ر)

المستوى الثانى (علوم الحاسب - الرياضيات - الفيزياء – الجيوفيزياء)

(3-5) استخدام تحويلات لابلاس لحل المعادلات التفاضلية:

مثال (1):

أوجد الحل الوحيد الآتي:

$$y'' + y = \sin(2x); \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

الحـل

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة يكون

$$L\{y''\} + L\{y\} = L\{\sin 2x\}$$

وباستخدام الجداول نجد أن: (حيث $L\{y(x)\} = Y(s)$)

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = \frac{2}{s^2+4}$$

ومنها

$$Y = \frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

وباستخدام الكسور الجزيئية يكون

$$Y(s) = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

وبأخذ مؤثر لابلاس العكسي وباستخدام الجداول نجد أن:

$$y(x) = \frac{5}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$$

مثال (2):

باستخدام لابلاس أوجد الحل الوحيد

$$y'' + 2y' - y = e^{x}\sin x \;;\quad y(0)=0,\; y'(0)=1$$

الحـل

بأخذ مؤثر لابلاس للطرفين يكون

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY - y(0)\right] - Y = \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$\therefore\; \left(s^2+2s-1\right)Y = \frac{1}{(s-1)^2+1}+1$$

$$Y = \frac{s^2-2s+3}{\left(s^2-2s+2\right)\left(s^2+2s-1\right)}$$

$$= \frac{1}{17}\left[\frac{-16s+37}{s^2-2s+2}+\frac{16s+44}{s^2+2s-1}\right]$$

$$= \frac{1}{17}\left[\frac{-16(s-1)+21}{(s-1)^2+1}+\frac{16(s+1)+28}{(s+1)^2-2}\right]$$

$$= \frac{1}{17}\left[-16\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1}+21\frac{1}{(s-1)^2+1}\right.$$

$$\left.+16\frac{(s+1)}{(s+1)^2-2}+\frac{28}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2-2}\right]$$

وبأخذ مؤثر لابلاس العكسي للطرفين، يكون

$$y(x) = \frac{1}{17}\left[-16e^{x}\cos x + 21e^{x}\sin x + 16e^{-x}\cosh\sqrt{2}x + 14\sqrt{2}e^{-x}\sinh\sqrt{2}x\right]$$

(4-5) استخدام تحويلات لابلاس لحل مجموعة من المعادلات التفاضلية:

مثال (1):

أوجد الحل الوحيد للمجموعة

$$\frac{dy_1}{dx} + 2y_2 = 1 \qquad ;\; y_1(0)=0$$

$$\frac{dy_2}{dx} - y_1 = x \qquad ;\; y_2(0)=0$$

الحـل

بأخذ مؤثر لابلاس لطرفي كل من المعادلتين حيث

$$L\{y_1(x)\} = Y_1(s),$$

$$L\{y_2(x)\} = Y_2(s)$$

$$sY_1 + 2Y_2 = \frac{1}{s}$$

$$sY_2 - Y_1 = \frac{1}{s^2}$$

وبحل هاتين المعادلتين يكون

$$Y_1 = \frac{s^2-2}{s^2\left(s^2+2\right)},$$

$$Y_2 = \frac{2}{s\left(s^2+2\right)}$$

وباستخدام الكسور الجزيئية يكون

$$Y_1 = \frac{-1}{s^2} + \frac{2}{s^2+2}$$

$$Y_2 = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+2}$$

وبأخذ مؤثر لابلاس العكسي يكون

$$y_1(x) = -x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x$$

$$y_2(x) = 1 - \cos\sqrt{2}x$$

مسائل محلولة

باستخدام تحويلات لابلاس أوجد الحل الوحيد لكل مما يأتي:

(1)

$$y'' + 3y' + 2y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

الحل

$$\mathcal{L}[y''] + 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1].$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0), \quad \mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0).$$

$$s^2Y(s) - 2 + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s}.$$

$$(s^2+3s+2)Y(s) = 2 + \frac{1}{s} = \frac{2s+1}{s}, \quad \text{or} \quad Y(s) = \frac{2s+1}{s(s^2+3s+2)}.$$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}.$$

$$2s+1 = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1).$$

$$\begin{aligned}
s=0: &\quad 1=A2, &\quad \text{so} \quad A=\frac{1}{2},\\
s=-1: &\quad -1=B(-1)(1), &\quad \text{so} \quad B=1,\\
s=-2: &\quad -3=C(-2)(-1), &\quad \text{so} \quad C=-\frac{3}{2},
\end{aligned}$$

$$Y(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{s+2}.$$

$$1=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right], \quad e^{-t}=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right], \quad e^{-2t}=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right],$$

$$y(t)=\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}.$$

(2)

$$y''+3y=\sin 5t, \quad y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

الحل

$$\mathcal{L}[y'']+3\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[\sin 5t]$$

$$s^2Y(s)+3Y(s)=\frac{5}{s^2+25}.$$

$$Y(s)=\frac{5}{(s^2+3)(s^2+25)}.$$

$$Y(s)=\frac{5}{(s^2+3)(s^2+25)}=\frac{As+B}{s^2+3}+\frac{Cs+D}{s^2+25}.$$

$$5=(As+B)(s^2+25)+(Cs+D)(s^2+3).$$

$$\begin{aligned}
1: &\quad 5=25B+3D,\\
s: &\quad 0=25A+3C,\\
s^2: &\quad 0=B+D,\\
s^3: &\quad 0=A+C.
\end{aligned}$$

$$A=C=0.$$

$$B=\frac{5}{22}, \quad D=-\frac{5}{22},$$

$$Y(s)=\frac{5/22}{s^2+3}-\frac{5/22}{s^2+25}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right]=\sin\sqrt{3}t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s^2+25}\right]=\sin 5t.$$

$$Y(s)=\frac{5}{22\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}-\left(\frac{1}{22}\right)\frac{5}{s^2+25}$$

$$y(t)=\frac{5}{22\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t-\frac{1}{22}\sin 5t.$$

(3)

$$y'' - 2y' + y = 3e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

الحل

$$\mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^t].$$

$$s^2Y(s) - s - 1 - 2[sY(s) - 1] + Y(s) = \frac{3}{s-1}.$$

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = \frac{3}{s-1} + s - 1 = \frac{s^2 - 2s + 4}{s-1},$$

$$Y(s) = \frac{s^2 - 2s + 4}{(s^2 - 2s + 1)(s-1)} = \frac{s^2 - 2s + 4}{(s-1)^3}.$$

$$Y(s) = \frac{s^2 - 2s + 4}{(s-1)^3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3}.$$

$$\begin{aligned} s^2 - 2s + 4 &= A(s-1)^2 + B(s-1) + C \\ &= A(s^2 - 2s + 1) + B(s-1) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1: &\quad 4 = A - B + C, \\ s: &\quad -2 = -2A + B, \\ s^2: &\quad 1 = A, \end{aligned}$$

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 3.$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^3}.$$

$$e^t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] \quad \text{and} \quad t^2e^t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^3}\right].$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{(s-1)^3}$$

$$y(t) = e^t + \frac{3}{2}t^2e^t.$$

(4)

$$y'' + 4y = 3\sin 2t \text{ with } y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

الحل

f(t)	*F(s)*
$\cos 2t$	$\frac{s}{s^2+4}$
$t\cos 2t$	$-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{-(s^2+4)+2s^2}{(s^2+4)^2}$ $= \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} = \frac{(s^2+4)-8}{(s^2+4)^2}$ $= \frac{-8}{(s^2+4)^2} + \frac{1}{s^2+4}$
$\frac{1}{2}\sin 2t$	$\frac{1}{s^2+4}$
$t\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$	$\frac{-8}{(s^2+4)^2}$

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = 3\frac{2}{s^2+4}.$$

$$s^2 Y(s) + 4Y(s) = \frac{6}{s^2+4}.$$

$$Y(s) = \frac{6}{(s^2+4)^2} = \frac{6}{(s^2+2^2)^2} = \frac{3}{4}\left[\frac{2\cdot 2^2}{(s^2+2^2)^2}\right],$$

$$y(t) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - t\cos 2t\right).$$