مسائل محلولة

مثال: أوجد طول العمود الساقط من النقطة $A(2,1,5)$ على المستوى الذي يتكون من النقاط الثلاث $B(2,3,1), C(1,1,1), D(1,3,4)$.

الحل

نوجد أولا المتجهات $\overrightarrow{BA}=(0,-2,4), \overrightarrow{BC}=(-1,-2,0), \overrightarrow{BD}=(-1,0,3),$

ثم نوجد حاصل الضرب الثلاثي القياسي لتلك المتجهات فإذا كان حاصل الضرب الثلاثي القياسي لا يساوي صفر فإن المتجهات $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ تمثل أحرف متوازي سطوح قاعدته تمثل بالحرفين $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)=\begin{vmatrix}0 & -2 & 4\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=-14 \qquad (1)$$

وحيث أن حجم متوازي السطوح يساوي مساحة القاعدة في الإرتفاع حيث مساحة القاعدة تعين من مقياس حاصل الضرب الإتجاهي للمتجهين $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$. وحيث أن

$$\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=-6\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k} \qquad (2)$$

فإن $\left|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{36+9+4} = 7$ وبالتالي يكون طول العمود الساقط من النقطة $A(2,1,5)$ على المستوى الذي يتكون من النقاط الثلاث $B(2,3,1), C(1,1,1), D(1,3,4)$ هو

$$h=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{14}{7}=2$$

مثال:

أثبت أنه لأي ثلاث متجهات غير صفرية $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ يكون

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) + \vec{B} \wedge \left(\vec{C} \wedge \vec{A}\right) + \vec{C} \wedge \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{0}\ .$$

الحل

حيث أن

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)\vec{C}\ (1)$$

$$\vec{B} \wedge \left(\vec{C} \wedge \vec{A}\right) = \left(\vec{B} \cdot \vec{A}\right)\vec{C} - \left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right)\vec{A}\ (2)$$

$$\vec{C} \wedge \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \left(\vec{C} \cdot \vec{B}\right)\vec{A} - \left(\vec{C} \cdot \vec{A}\right)\vec{B}\ (3)$$

بجمع (3) ,(2), (1) واستخدام خاصية الإبدال لحاصل الضرب القياسي نجد أن

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) + \vec{B} \wedge \left(\vec{C} \wedge \vec{A}\right) + \vec{C} \wedge \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{0}$$

عرف الإستقلال والإرتباط الخطي للمتجهات

يقال بأن المتجهات $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots\ldots, \vec{a}_n$ مستقلة خطيا إذا كان $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots, k_n$ كميات قياسية وكان $k_1\,\vec{a}_1 + k_2\,\vec{a}_2 + k_3\,\vec{a}_3 + \ldots\ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{0}$ بحيث يكون $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, \ldots\ldots, k_n = 0$.

ويقال بأن المتجهات $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots\ldots, \vec{a}_n$ مرتبطة خطيا إذا كان $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots, k_n$ كميات قياسية وكان $k_1\,\vec{a}_1 + k_2\,\vec{a}_2 + k_3\,\vec{a}_3 + \ldots\ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{0}$ بحيث يكون $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 \neq 0, \ldots\ldots, k_n \neq 0$ أو بحيث يكون على الأقل واحد من الكميات القاسية لايساوي صفر.

مثال:

أثبت أن المتجهات $\vec{r}_1 = \hat{j} - 2\,\hat{k}, \vec{r}_2 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{r}_3 = \hat{i} + 2\,\hat{j} + \hat{k}$ مستقلة خطيا.

الحل

نفرض أن k_1, k_2, k_3 ثلاث كميات قياسية وأن

$$k_1\vec{r}_1 + k_2\vec{r}_2 + k_3\vec{r}_3 = \vec{0}\ \ (1)$$

وحيث أن $\vec{r}_1 = \hat{j} - 2\,\hat{k}, \vec{r}_2 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{r}_3 = \hat{i} + 2\,\hat{j} + \hat{k}$ فإن (1)تصبح على الصورة

$$\left(k_2 + k_3\right)\hat{i} + \left(k_1 - k_2 + 2k_3\right)\hat{j} + \left(-2k_1 + k_2 + k_3\right)\hat{k} = \vec{0}\ \ (2)$$

ومن المعادلة (2) نحصل على أن

$$k_2 + k_3 = 0 \quad (3)$$

$$k_1 - k_2 + 2k_3 = 0 \quad (4)$$

$$-2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \quad (5)$$

بضرب (4) في 2 والجمع على (5) نحصل على

$$-k_2 + 5k_3 = 0 \quad (6)$$

وبجمع (6) ,(3) نحصل على

$$6k_3 = 0 \Rightarrow k_3 = 0 \quad (7)$$

وبالتعويض من (7) في (3) نحصل على

$$k_2 = 0 \quad (8)$$

وبالتعويض من (8) ,(7) في (4) نحصل على $k_1 = 0$ أي ان $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ وبالتالي فإن المتجهات $\vec{r}_1 = \hat{j} - 2\hat{k}, \vec{r}_2 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{r}_3 = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ مستقلة خطيا.

<u>مثال:</u>

أثبت أن المتجهات $\vec{r}_1 = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}, \vec{r}_2 = 3\vec{a} - 5\vec{b} + 2\vec{c}, \vec{r}_3 = 4\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$ مرتبطة خطيا حيث $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متجهات غير صفرية ولا تقع في مستوى واحد.

<u>الحل</u>

نفرض أن k_1, k_2, k_3 ثلاث كميات قياسية وأن

$$k_1\vec{r}_1 + k_2\vec{r}_2 + k_3\vec{r}_3 = \vec{0} \quad (1)$$

وحيث أن $\vec{r}_1 = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}, \vec{r}_2 = 3\vec{a} - 5\vec{b} + 2\vec{c}, \vec{r}_3 = 4\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$ فإن (1)تصبح على الصورة

$$(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)\vec{a} + (-3k_1 - 5k_2 - 5k_3)\vec{b} + (k_1 + 2k_2 + k_3)\vec{c} = \vec{0} \quad (2)$$

ومن المعادلة (2) نحصل على أن

$$2k_1 + 3k_2 + 4k_3 = 0 \quad (3)$$

$$3k_1 + 5k_2 + 5k_3 = 0 \quad (4)$$

$$k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \quad (5)$$

من المعادلة (5) نحصل على

$$k_1 = -2k_2 - k_3 \quad (6)$$

وبالتعويض من (6) في(3) او (4) نحصل على

$$-k_2 + 2k_3 = 0 \quad (7)$$

والمعادلة (7) تتحقق عندما $k_2 = 2, k_3 = -1$ وبذلك تصبح $k_1 = -3$ وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة $-3\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 - \vec{r}_3 = \vec{0}$ أو على الصورة $\vec{r}_3 = 2\vec{r}_2 - 3\vec{r}_1$ أي أن المتجهات $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ مرتبطة خطيا.

مثال:

أوجد حل المعادلة الاتجاهية $m\,\vec{X} = n\,\vec{A} + \vec{A} \wedge \vec{X}$ حيث $\vec{A}$ متجه معلوم غير صفري، n, m عددان معلومان.

الحل

لحل المعادلة الإتجاهية

$$m\,\vec{X} = n\,\vec{A} + \vec{A} \wedge \vec{X} \qquad (1)$$

نقوم بضرب المعادلة الإتجاهية (1) قياسيا في $\vec{A}$ ثم نقوم بضربها إتجاهيا في $\vec{A}$ فنحصل على

$$m\,\vec{A} \cdot \vec{X} = n\,\vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \left(\vec{A} \wedge \vec{X}\right) = n\,A^2 \qquad (2)$$

$$m\,\vec{A} \wedge \vec{X} = n\vec{A} \wedge \vec{A} + \vec{A} \wedge \left(\vec{A} \wedge \vec{X}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{X}\right)\vec{A} - \left(\vec{A} \cdot \vec{A}\right)\vec{X} \qquad (3)$$

وبالتعويض من (2) في (3) نحصل على

$$\vec{A} \wedge \vec{X} = \frac{n\,A^2}{m^2}\,\vec{A} - \frac{A^2}{m}\,\vec{X} \qquad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (1) والتبسيط نحصل على

$$\vec{X} = \frac{n}{m}\,\vec{A} \qquad (5)$$

مثال:

أوجد حل المعادلات الإتجاهية $s\,\vec{X}+t\,\vec{Y}=\vec{A},\ \vec{X}\wedge\vec{Y}=\vec{B},\ \vec{A}\cdot\vec{B}=0$ حيث $\vec{A},\vec{B}$ متجهان معلومان غير صفريين، s,t عددان معلومان غير صفريين، $\vec{X},\vec{Y}$ متجهان مجهولان.

<u>الحل</u>

حيث أن

$$s\,\vec{X}+t\,\vec{Y}=\vec{A},\ \vec{X}\wedge\vec{Y}=\vec{B},\ \vec{A}\cdot\vec{B}=0 \quad (1)$$

المعادلة الثانية في(1) تعطي أن $\vec{B}\perp\vec{X},\vec{B}\perp\vec{Y}$ أي أن

$$\vec{B}\cdot\vec{X}=\vec{B}\cdot\vec{Y}=0 \quad (2)$$

المعادلة (2) يمكن كتابتها على الصورة

$$\vec{B}\cdot\left(\vec{X}-\vec{Y}\right)=0 \quad (3)$$

وحيث أن

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}=0 \quad (4)$$

من المعادلتين (4) ,(3) نستنتج أن

$$\vec{X}=\vec{Y}+\vec{A} \quad (5)$$

وبالتعويض من (5) في المعادلة الأولى من (1) نحصل على

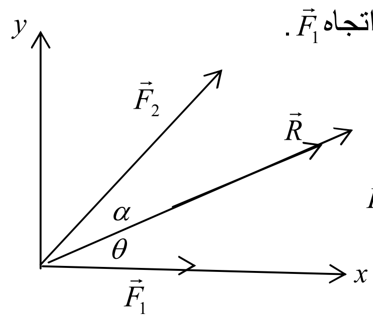
$$\vec{Y}=\frac{1-s}{s+t}\vec{A} \quad (6)$$

وبالتعويض من (6) في(5) نحصل على

$$\vec{X}=\frac{1+t}{s+t}\vec{A} \quad (7)$$

<u>مثال:</u>

قوتان $\vec{F}_1,\vec{F}_2$ ومحصلتهما $\vec{R}$ حيث المحصلة $\vec{R}$ تصنع زاوية θ مع $\vec{F}_1$. إذا أضيفت إلى القوة $\vec{F}_1$ قوة مقدارها R في نفس اتجاه $\vec{F}_1$ فأثبت أن المحصلة الجديدة تصنع زاوية $\frac{\theta}{2}$ مع اتجاه $\vec{F}_1$.



<u>الحل</u>

بفرض أن القوتين $\vec{F}_1,\vec{F}_2$ يحصران بينهما زاوية α وأن $\vec{R}$ تصنع زاوية θ مع $\vec{F}_1$

كما هو موضح بالرسم وبتحليل القوتين $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ في اتجاهي محوري x, y

نجد أن

$$\vec{F}_1 = F_1\,\hat{i}, \vec{F}_2 = F_2\cos\alpha\,\hat{i} + F_2\sin\alpha\,\hat{j}$$

وحيث أن $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ فإن $\vec{R} = (F_1 + F_2\cos\alpha)\hat{i} + F_2\sin\alpha\,\hat{j}$ وبالتالي تكون زاوية ميل المحصلة $\vec{R}$ على محور x هو

$$\tan\theta = \frac{F_2\sin\alpha}{F_1 + F_2\cos\alpha} \quad (1)$$

وبعد إضافة القوة التي مقدارها R إلى القوة $\vec{F}_1$ فإن القوة الجديدة تصبح

$\vec{F}_1{}' = (F_1 + R)\hat{i}$ وبذلك تصبح المحصلة الجديدة $\vec{R}'$ على الصورة

$$\vec{R}' = (F_1 + F_2\cos\alpha + R)\hat{i} + F_2\sin\alpha\,\hat{j}$$

وبفرض أن زاوية ميل المحصلة الجديدة على محور x هي θ' وبالتالي يكون

$$\tan\theta' = \frac{F_2\sin\alpha}{F_1 + F_2\cos\alpha + R} \quad (2)$$

وبقسمة (1) على (2) نحصل على

$$\frac{\tan\theta}{\tan\theta'} = \frac{F_1 + F_2\cos\alpha + R}{F_1 + F_2\cos\alpha} = 1 + \frac{R}{F_1 + F_2\cos\alpha} \quad (3)$$

وحيث أن $\cos\theta = \frac{R_x}{R} = \frac{F_1 + F_2\cos\alpha}{R}$ فإن (3) تصبح على الصورة

$$\frac{\sin\theta}{\tan\theta'} = 1 + \cos\theta \Rightarrow \tan\theta' = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{2\sin\theta/2\cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2} = \tan\theta/2 \quad (4)$$

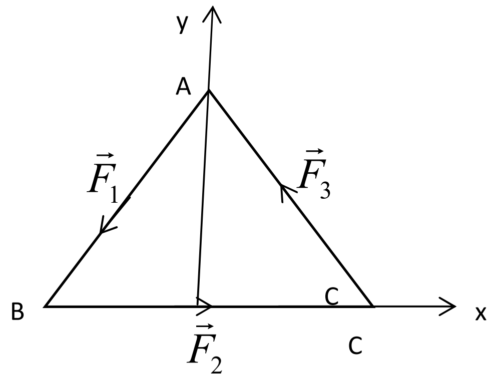
من المعادلة (4) يتضح أن $\theta' = \theta/2$ أي أن المحصلة الجديدة تميل بزاوية $\theta/2$ على محور x.

مثال:

ثلاث قوى متساوية مقدار كل منها F تؤثر في نقطة مادية في اتجاهات موازية لأضلاع المثلث ABC مأخوذة في ترتيب دوري واحد. أثبت أن مقدار محصلتهم R تعطى بالمعادلة :

$$R^2 = F^2(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)$$

الحل



بتحليل القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ في اتجاه محوري x, y نجد أن

$$\vec{F}_1 = -F\cos B\,\hat{i} - F\sin B\,\hat{j}, \quad (1)$$

$$\vec{F}_2 = F\,\hat{i} \qquad (2)$$

$$\vec{F}_3 = -F\cos C\,\hat{i} + F\sin C\,\hat{j}, \quad (3)$$

بجمع (3) ,(2) ,(1) نحصل على محصلة القوى على الصورة التا .

$$\vec{R} = F\left[(1-\cos B-\cos C)\hat{i} + (\sin C - \sin B)\hat{j}\right], \quad (4)$$

وبضرب المعادلة (4) قياسيا في نفسها نحصل على

$$R^2 = F^2\left[(1-\cos B-\cos C)^2 + (\sin C - \sin B)^2\right], \quad (5)$$

وبتبسيط المعادلة (5) نحصل على

$$R^2 = F^2\left[3 - 2\cos B - 2\cos C + 2\cos(B+C)\right],$$

$$R^2 = F^2\left[3 - 2\cos B - 2\cos C - 2\cos A\right]$$

مثال:

إذا كان مقدارمحصلة قوتين متساويتين الزاوية بينهما 2α تساوي ضعف مقدارمحصلة نفس القوتين المتساويتين عندما تكون الزاوية بينهما 2β فأثبت أن $\cos\alpha = 2\cos\beta$.

الحل:

متروك للطالب

مثال:

$ABCD$ هرم ثلاثي منتظم طول ضلعه $2a$ تؤثر القوة $\vec{F}_1$ في إتجاهي $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}$ والقوة $\vec{F}_2$ في إتجاهي $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CA}$ والقوة $\vec{F}_3$ في إتجاهي $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}$ أثبت أن خطوة اللولبية المكافئة تساوي $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ من طول ضلع الهرم.

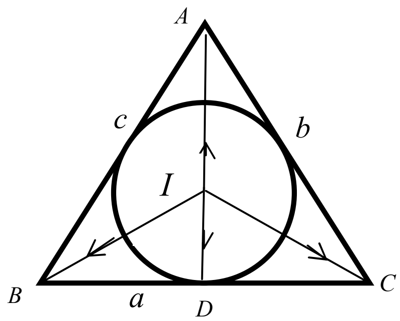
الحل

متروك للطالب

مثال:

إذا كانت I هي مركز الدائرة الداخلة للمثلث ABC فأثبت أن $a\,\vec{IA}+b\,\vec{IB}+c\,\vec{IC}=\vec{0}$

حيث $a,b,c,$ هي أطوال أضلاع المثلث ABC .



<u>الحل</u>

حيث أن D تقسم BC بنسبة $c:b$ وذلك لأن DA منصف الزاوية $C\hat{A}B$

فإنه في المثلث IBC يكون

$$b\,\vec{IB}+c\,\vec{IC}=(b+c)\vec{ID} \quad (1)$$

وحيث أن IB منصف للزاوية $D\hat{B}A$ فإن I يقسم DA بنسبة $BD:BA$ أي أن

$$\frac{ID}{IA}=\frac{BD}{BA}=\frac{BD}{BC}\frac{BC}{BA}=\frac{c}{b+c}\frac{a}{c}=\frac{a}{b+c}$$ ومنها نحصل على أن

$(2)\ (b+c)\vec{ID}=a\,\vec{IA}$ وبإضافة $a\,\vec{IA}$ لطرفي المعادلة الإتجاهية (1) واستخدام (2)

نحصل على $a\,\vec{IA}+b\,\vec{IB}+c\,\vec{IC}=\vec{0}$

<u>مثال</u>

ما هو أبسط تمثيل لمجموعة من القوى الفراغية؟ وما هو الشرط اللازم لكي يؤول هذا التمثيل

إلى قوة وحيدة؟ وإذا علمت أن القوى $P\hat{k}, P\hat{i}, -P\hat{i}$ تؤثر في النقاط

$(0,a,0), (0,0,a), (0,0,0)$ على الترتيب. اختزل المجموعة إلى قوة وإزدواج مارين بالنقطة

$(0,0,0)$ ثم أوجد محصلتهم اللولبية.

الحل

أبسط تمثيل لمجموعة من القوى الفراغية هو المجموعة اللولبية والتي تتكون من قوة وزدواج عزمه يكون في إتجاه خط عمل القوة. والشرط اللازم لكي يؤول هذا التمثيل إلى قوة وحيدة هو $\vec{F} \cdot \vec{L}_o = 0$.

وحيث أن

$$\vec{F}_1 = -P\,\hat{i}, \vec{r}_1 = \vec{0}, \vec{F}_2 = P\,\hat{i}, \vec{r}_2 = a\,\hat{k}, \vec{F}_3 = P\,\hat{k}, \vec{r}_3 = a\,\hat{j} \,(1)$$

من المعادلات في (1) يتضح أن القوة المحصلة وعزوم القوى حول نقطة الأصل تكون على الصورة

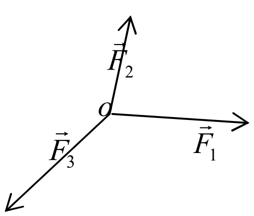
$$\vec{F} = P\,\hat{k}, \vec{L}_o = a\,P\,\hat{i} + a\,P\,\hat{j} \,(2)$$

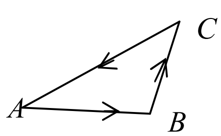
من المعادلتين في (2) يتضح أن خطوة اللولبية تكون على الصورة $P = \dfrac{\vec{F} \cdot \vec{L}_o}{F^2} = 0$ ويكون خط عمل اللولبية على الصورة $\vec{r} = \dfrac{\vec{F} \wedge \vec{L}_o}{F^2} + \lambda \vec{F} = a\left(-\hat{i} + \hat{j}\right) + \lambda P \hat{k}$ ويكون نقطة تأثير اللولبية هي $(-a, a, 0)$.

أذكر مع البرهان قاعدة مثلث القوى.

قاعدة مثلث القوى تنص على أنه إذا أثرت ثلاث قوى في نقطة مادية وكانت هذه القوى ممثلة في المقدار والإتجاه بأضلاع مثلث مأخوذة في ترتيب دوري واحد فإن هذه القوى تكون متزنة.

نفرض أن ثلاث قوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ تؤثر في نقطة o ويمثلها في المقدار والإتجاه الأضلاع AB, BC, CA في المثلث ABC كما هو موضح بالشكل.



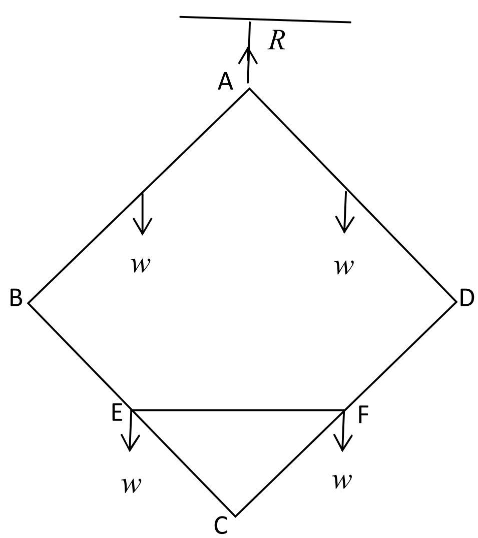


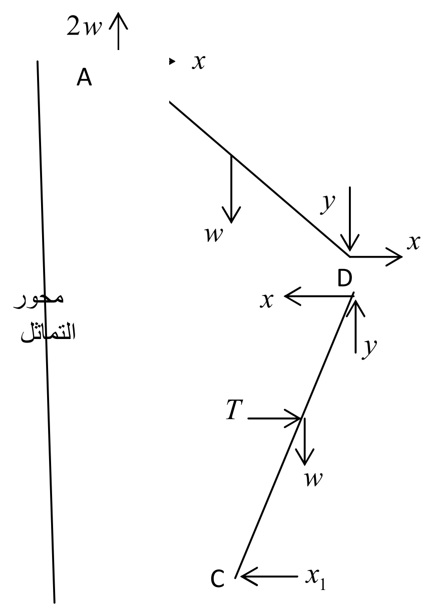
ومن قاعدة المثلث في المتجهات نعلم أن $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$ أي أن $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

أي أن القوى متزنة.

مثال

أربعة قضبان متماثلة ومتجانسة وثقيلة متصلة إتصالا مفصليا أملسا لتكون الشكل الرباعي $ABCD$ علق الشكل من المفصل A واتخذ شكل مربع وذلك بأن وصل منتصفي القضيبين BC, CD بواسطة قضيب خفيف. أوجد مركبتي رد الفعل عند المفصل D وكذلك الإجهادات في القضيب الخفيف.





حيث أن القضيب EF خفيف فإن خط عمل القوى المؤثرة عليه عند طرفيه ونظرا لكونه متزن فإنها تكون متساوية مقدارا ومتضادة اتجاها وخط عملها هو محور القضيب نفسه. وكذلك حيث أن هناك تماثل حول المحور AC فإن ردود أفعال المفصلات على القضبان تكون كما هو مبين بالشكل.

بدراسة اتزان القضيب AD نجد أن

$$2w - w + y = 0 \Rightarrow y = w(I)$$

وبأخذ العزوم حول D نجد أن

$$-x(2a\cos 45)-2w(2a\cos 45)+w(a\cos 45)=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}w \quad (II)$$

بدراسة اتزان القضيب CD وأخذ العزوم حول C نجد أن

$$-(T+w)(a\cos 45)+(x+y)(2a\cos 45)=0 \Rightarrow T=2x+2y-w \quad (III)$$

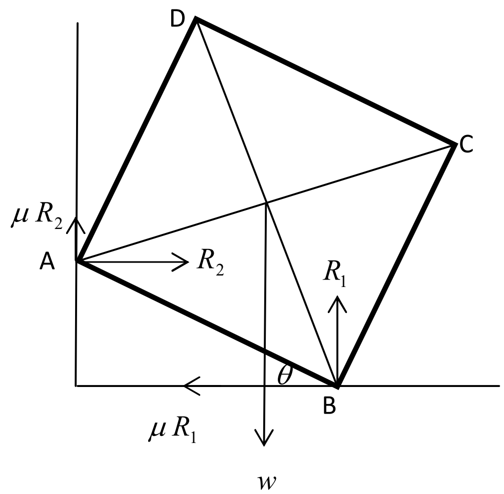
وبالتعويض من $(I),(II)$ في (III) ينتج أن

$$T=4w \quad (IV)$$

مثال

$ABCD$ صفيحة مربعة الشكل متزنة في مستوى رأسي بحيث تقع A على حائط رأسي خشن وتقع B على أرض أفقية خشنة فإذا كان مستوى الصفيحة عموديا على الحائط وكان معامل الإحتكاك بالنسبة للحائط والأرض هو μ، θ هي زاوية ميل AB على الأفقي فأثبت أن الصفيحة تكون على وشك الإنزلاق عندما $\tan\theta=\frac{1-\mu}{1+\mu}$.

الحل



بدراسة إتزان الصفيحة نجد أن

$$R_1+\mu R_2=w \qquad (1)$$

$$R_2=\mu R_1 \qquad (2)$$

ومن المعادلتين $(1), (2)$ نحصل على

$$R_1=\frac{w}{1+\mu^2} \qquad (3)$$

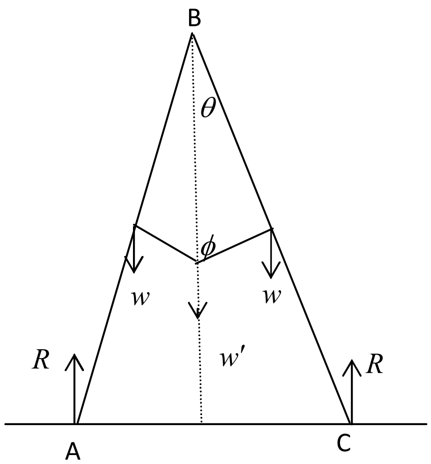
$$R_2=\frac{\mu w}{1+\mu^2} \qquad (4)$$

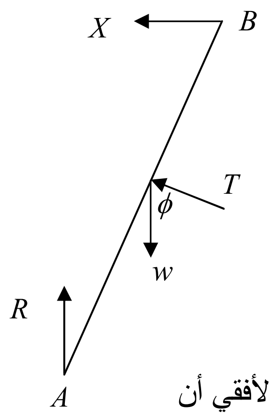
وبأخذ العزوم حول B نجد أن $\mu R_2 a\cos\theta+R_2 a\sin\theta=w\frac{a}{\sqrt{2}}\sin(45-\theta)$ وبإستخدام (4)

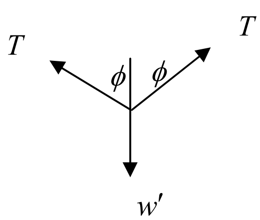
والتبسيط نحصل على $\tan\theta=\frac{1-\mu}{1+\mu}$.

مثال

AB, BC قضيبان منتظمان وزن كل منهما w متصلان بمفصلة سهلة عند B يتزنان بالطرفين A, C ملامسين لمستوى أفقي أملس ويصل بين القضيبين خيط خفيف طوله(أصغر من طول كل من القضيبين) بين منتصفي القضيبين ومعلق في منتصف الخيط وزن w' . إذا كانت زاوية ميل كل قضيب على الرأسي هي θ وزاوية ميل كل من جزئي الخيط على الرأسي هي ϕ فأثبت أن $\tan\phi = \left(1+\dfrac{2w}{w'}\right)\tan\theta$.







الحل:

بدراسة اتزان الوزن المعلق w' نجد أن

$$w' = 2T\cos\phi \qquad (1)$$

وبدراسة اتزان المجموعة نحصل على

$$R = w + \frac{w'}{2} \qquad (2)$$

وبدراسة اتزان القضيب AB نجد من التحليل الأفقي أن

$$X = T\sin\phi \qquad (3)$$

وبأخذ العزوم حول منتصف AB نحصل على

$$X\cos\theta = R\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{X}{R} = \frac{T\sin\phi}{w+\frac{w'}{2}} = \frac{w'\tan\phi}{2w+w'} \Rightarrow \qquad (4)$$

$$\tan\phi = \left(1+\frac{2w}{w'}\right)\tan\theta$$

مثال:

وضعت صفيحة مربعة الشكل $ABCD$ وزنها w على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية $\alpha < \frac{\pi}{4}$ بحيث ينطبق الضلع AB على خط أكبر ميل ويكون مستوى الصفيحة رأسيا، C أعلى نقطها. معامل الاحتكاك هو μ حيث $\mu > \tan\alpha, \mu < \cot\alpha$ أثرت قوة أفقية متزايدة P في نقطة D بحيث يقع خط عملها في مستوى الصفيحة أعلى المستوى أثبت أن الصفيحة تبدأ في الانزلاق (ما لم تكن قد بدأت في الانقلاب) عندما $P = w(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)/(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$ وأنها تبدأ في الانقلاب (ما لم تكن قد بدأت في الانزلاق) عندما $P = w(\sin\alpha + \cos\alpha)/2(\cos\alpha - \sin\alpha)$ استنتج أن الصفيحة تنقلب أو تنزلق أولا على حسب ما إذا كان أكبر أو أصغر من $(2t^2 - t + 1)/2(t^2 - t + 2)$ حيث $t = \tan\alpha$.

الحل:

متروك للطالب