The Big-M Method :

طريقة (م) الكبرى : Big-M Technique

سنوضح هذه الطريقة من خلال المثال التالي :

مثال ١ :

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2$$

subject,

$$-2X_1 + 3X_2 = 3 \qquad (1)$$

$$4X_1 + 5X_2 \geq 10 \qquad (2)$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 5 \qquad (3)$$

$$X_1 \ , \ X_2 \geq 0$$

في البداية نضع القيود في الشكل القياسي لتصبح :

$$-2X_1 + 3X_2 = 3 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$4X_1 + 5X_2 - S_1 = 10 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 5 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ S_1 \ , \ S_2 \geq 0$$

ولنستخدم X_3 ، X_4 كمتغيرات خارجة بدلا من S_1, S_2 فيصبح القيدان الثاني والثالث :

$$4X_1 + 5X_2 - X_3 = 10 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 5 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

ولأن هناك احتمالية بأن تكون X_1 ، X_2 = صفر فهذه تعطي من القيد الاول والثاني نوعا من الخطأ ولذلك لابد من اضافة متغير آخر مهمته تغطية هذه الاحتمالية ويسمى هذا المتغير بالمتغير الاصطناعي R فيصبح القيدين الاول والثاني كالتالي :

$$-2X_1 + 3X_2 + R_1 = 3 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$4X_1 + 5X_2 - \underbrace{S_1}_{X_3} + R_2 = 10 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

الهدف كالاتي :

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2 + MR_1 + MR_2$$

ولأن R_1، R_2 متغيرات غير اساسية يجب ان يكون معاملها في دالة الهدف في الحل الابتدائي صفرا لذلك يجب التعويض عنها في دالة الهدف من القيدين الاول والثاني حيث :

$$R_1 = 3 + 2X_1 - 3X_2$$
$$R_2 = 10 - 4X_1 - 5X_2 + X_3$$

فتصبح دالة الهدف كالاتي :

$$Z = 2X_1 + 3X_2 + M(3 + 2X_1 - 3X_2) + M(10 - 4X_1 - 5X_2 + X_3).$$

وبتبسيط Z تصبح :

$$Z + (-2 + 2M)X_1 + (-3 + 8M)X_2 - MX_3 = 13M.$$

جدول الحل الابتدائي سيكون بالصورة التالية :

Basic	X_1	X_2 ↓	X_3	X_4	R_1	R_2	Solution
← R_1	-2	3	0	0	1	0	3
R_2	4	5	-1	0	0	1	10
X_4	1	2	0	1	0	0	5
Z	-2+2M	-3+8M	-M	0	0	0	13M

العنصر الداخل هو X_2 والعنصر الخارج هو R_1

Pivot element = 3

Pivot equation = (-2 , 3 , 0 , 0 , 1 , 0 , 3)/3
= (-2/3 , 1 , 0 , 0 , 1/3 , 0 , 1)

New Z = (-2+2M , -3+8M , -M , 0 , 0 , 0 , 13M)
- (-3+8M) (-2/3 , 1 , 0 , 0 , 1/3 , 0 , 1)

= (-2+2M , -3+8M , -M , 0 , 0 , 0 , 13M)
- (2-16/3M , -3+8M , 0, 0 , -1+8/3M , 0 , -3+8M)
= (-4+22/3M , 0 , -M , 0 , 1-8/3M , 0 , 3+5M)

New R_2 = (4 , 5 , -1 , 0 , 0 , 1 , 10) - (-10/3 , 5 , 0 , 0 , 5/3 , 0 , 5)
= (22/3 , 0 , -1 , 0 , -5/3 , 1 , 5)

New X_4 = (1 , 2 , 0 , 1 , 0 , 0 , 5) - (-4/3 , 2 , 0 , 0 , 2/3 , 0 , 2)
= (7/3 , 0 , 0 , 1 , -2/3 , 0 , 3)

جدول الحل الثاني سيكون :

Basic	X_1 ↓	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	Solution
X_2	-2/3	1	0	0	1/3	0	1
← R_2	22/3	0	-1	0	-5/3	1	5
X_4	7/3	0	0	1	-2/3	0	3
Z	-4+22/3M	0	-M	0	1-8/3M	0	3+5M

المتغير الداخل X_1 والمتغير الخارج R_2

Pivot element = 22/3

Pivot equation = (1 , 0 , -3/22 , 0 , -5/22 , 3/22 , 15/22)

New Z = (-4+22/3M, 0 , -M , 0 , 1-8/3M , 0 , 3+5M)
-(-4+22/3M , 0 , 12/22-M , 0 , 20/22-5/3M , -12/22+M,
- 60/22 + 5M)
= (0 , 0 , -6/11, 0 , 2/22-M , 12/22-M , 63/11)

= (0 , 1 , -2/22 , 0 , 6/33 , 2/22 , 16/11)

New X_4 = (7/3 , 0 , 0 , 1 , -2/3 , 0 , 3)

- (7/3 , 0 ,-7/22 , 0 , -35/66 , 7/22 , 35/22)

= (0, 0 , 7/22 , 1 , -3/22 , -7/22 , 31/22)

جدول الحل الثالث :

Basic	X_1	X_2	X_3 ↓	X_4	R_1	R_2	Solution
X_2	0	1	-2/22	0	6/33	2/22	16/11
X_1	1	0	-3/22	0	-5/22	3/22	15/22
← X_4	0	0	7/22	1	-3/22	-7/22	31/22
Z	0	0	-6/11	0	1/11-M	6/11-M	63/11

المتغير الداخل X_3 والمتغير الخارج X_4

Pivot element = 7/22

Pivot equation = (0 , 0 , 1 , 22/7, -3/7, -1 , 31/7)

New Z = (0 , 0 , -6/11, 0 , 1/11-M , 6/11-M , 63/11)

+(0 , 0 , 6/11 , 6/7 , 18/77 , -6/11 , 186/77)

= (0 , 0 , 0, 6/7 , 25/77-M , -M , 57/7)

New X_2 = (0, 1 , -2/22 , 0 , 2/11 , 2/22 , 16/11)

+(0 , 0 , 2/22 , 2/7 , -3/77 , -2/22 , 31/77)

= (0 , 1 , 0 , 2/7 , 1/7 , 0 , 13/7)

New X_1 = (1 , 0 , -3/22 , 0 , -5/22 , 3/22 , 15/22)

+(0 , 0 , 3/22 , 3/7 , -9/154 , -3/22 , 93/154)

= (1 , 0 , 0 , 3/7 , -2/7 , 0 , 9/7)

ون جدول الحل النهائي هو :

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	Solution
X_2	0	1	0	2/7	1/7	0	13/7
X_1	1	0	0	3/7	-2/7	0	9/7
X_3	0	0	1	22/7	-3/7	-1	31/7
Z	0	0	0	6/7	25/77-M	-M	57/7

لتالي يكون الاحل الامثل للنموذج هو :

$$Z = 57/7$$
$$X_1 = 9/7$$
$$X_2 = 13/7$$

غرض التأكد من صحة هذه القيم بالامكان تعويض قيم X_2, X_1 في دالة الهدف.

حظة: : عند التعامل مع مسائل التعظيم (Maximization) فإننا نضرب قيم R في ة الهدف في (-M)

ال٢ :- أوجد الحل الامثل للنموذج التالي بطريقة Big-M Technique.

$$\text{Max } Z = 3X_1 - X_2$$

subject to,

$$X_1 - 2X_2 \geq 4$$
$$X_1 + X_2 \leq 8$$
$$X_1 \geq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

حل :- نحول القيود الى الشكل القياسي :

$$X_1 - 2X_2 - X_3 + R_1 = 4$$
$$X_1 + X_2 + X_4 = 8$$
$$X_1 - X_5 + R_2 = 4$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, R_1, R_2 \geq 0$$

وباضافة MR_1-MR_2 - الى دالة الهدف تصبح :

$$Z = 3X_1 - X_2 - MR_1 - MR_2$$

حيث :

$$R_1 = 4 - X_1 + 2X_2 + X_3$$
$$R_2 = 4 - X_1 + X_5$$

وبالتعويض في دالة الهدف وتبسيطها تصبح :

$$Z = 3X_1 - X_2 - M(4 - X_1 + 2X_2 + X_3) - M(4 - X_1 + X_5)$$
$$= (3 + 2M)\ X_1 + (-1 - 2M)\ X_2 - MX_3 - MX_5 - 8M$$
$$Z - (3 + 2M)X_1 + (1 + 2M)X_2 + MX_3 + MX_5 = -8M$$

جدول الحل الابتدائي :

↓

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	Solution
R_1	1	-2	-1	0	0	1	0	4
R_2	1	0	0	0	-1	0	1	4
X_4	1	1	0	1	0	0	0	8
Z	-(3+2M)	1+2M	M	0	M	0	0	-8M

المتغير الداخل X_1 والمتغير الخارج R_1

vot element = 1

vot equation = (1 , -2 , -1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 4)

ew Z = (-3+2M , 1+2M , M , 0 , M , 0 , 0 , -8M)
+(3+2M, -6-4M , -3-2M , 0 , 0 , 3+2M , 0 , 12+8M)
=(0 , -5-2M , -3-M , 0 , M , 3+2M , 0 , 12)

w R_2 =(1, 0 , 0 , 0 , -1 , 0 , 1, 4) - (1 , -2 , -1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 4)
=(0 , 2 , 1 , 0 , -1 , -1 , 1 , 0)

w X_4 = (1 , 1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 8) - (1 , -2 , -1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 4)
=(0 , 3 , 1 , 1 , 0 , 1 , 0 , 4)
= (1 , 0 , 0 , 3/7 , -2/7 , 0 , 9/7)

جدول الحل الثاني :

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	Solution
X_1	1	-2	-1	0	0	1	0	4
R_2	0	2	1	0	-1	-1	1	0
X_4	0	3	1	1	0	-1	0	4
Z	0	-5-2M	-3-M	0	M	3+2M	0	12

المتغير الداخل X_2 والمتغير الخارج R_2

Pivot element = 2

Pivot equation = (0 , 1 , 1/2 , 0, -1/2, -1/2 , 1/2 , 0)

New Z = (0 , -5-2M, -3-M , 0 , M , 3+2M , 0 , 12)
- (0 , -5-2M , -5/2-M , 0 , 5/2+M , 5/2+M, -5/2-M , 0)
= (0 , 0 , -1/2 , 0 , -5/2 , 1/2+M , 5/2+M , 12)

New X_1 = (1, -2 , -1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 4) + (0 , 2 , 1 , 0 ,-1 ,-1 ,1 ,0)
= (1 , 0 , 0 , 0 , -1 , 0 , 1 , 4)

New X_4 = (0 , 3 , 1 , 1 , 0 , 1 , 0 , 4)-(0 , 3 , 3/2 , 0 , -3/2 , -3/2 , 3/2 , 0)
= (0 , 0 , -1/2 , 1 , 3/2 , 5/2 , -3/2 , 4)

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	Solutio
X_1	1	0	0	0	-1	0	1	4
X_2	0	1	1/2	0	-1/2	-1/2	1/2	0
X_4	0	0	-1/2	1	3/2	5/2	-3/2	4
Z	0	0	-1/2	0	-5/2	1/2+M	5/2+M	12

المتغير الداخل X_5 والمتغير الخارج X_4

Pivot element = 3/2

Pivot equation = (0 , 0 , -1/3 , 2/3 , 1 , 5/3 , -1 , 8/3)

$= (0 , 0 , -8/6 , 5/3 , 0 , 28/6+M , M , 56/3)$

w $X_1=(1, 0 , 0 , 0 , -1 , 0 , 1 , 4)+(0 , 0 , -1/3 , 2/3 , 1 , 5/3 , -1 ,8/3)$

$= (1 , 0 , -1/3 , 2/3 , 0 , 5/3 , 0 , 20/3)$

w $X_2 = (0 , 1 , 1/2 , 0 , -1/2 , -1/2 , 1/2 , 0)$

$+(0 , 0 , -1/6 , 1/3 , 1/2 , 5/6 , -1/2 , 4/3)$

$= (0 , 1 , 1/3 , 1/3 , 0, 1/3 , 0 ,4/3)$

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	Solution
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	5/3	0	20/3
X_2	0	1	1/3	1/3	0	1/3	0	4/3
X_5	0	0	-1/3	2/3	1	5/3	-1	8/3
Z	0	0	-8/6	5/3	0	28/6+M	-5-M	56/3

ويكون الحل الامثل هو :

$X_1 = 20/3$

$X_2 = 4/3$

$Z = 56/3$

طريقة المرحلتين : Tow Phase Method

تستخدم هذه الطريقة كبديلة عن طريقة (م) الكبرى في مسائل التقليل بتعريف دالـة هدف جديدة r تعتمد علـى المتغيرات الاصطناعيـة فقـط (م المتغيرات) وحتى يكون هناك حل للنموذج يجب ان تكون قيمة r = 0 والا فلا حل للنموذج.

وتكون هذه هي المرحلة الاولى، واذا كان يوجد حل فإننا نكمل الحل بتعويض قيمة المتغيرات في دالة الهدف ومن ثم ايجادها.

مثال :- في المثال الاول كان الشكل القياسي للقيود هو :

$$-2X_1 + 3X_2 + R_1 = 3$$
$$4X_1 + 5X_2 - X_3 + R_2 = 10$$
$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 5$$

نعرف دالة هدف جديدة هي : $r = R_1 + R_2$

$$= (3+2X_1 - 3X_2) + (10 - 4X_1 - 5X_2 + X_3)$$
$$= 13 - 2X_1 - 8X_2 + X_3$$
$$r + 2X_1 + 8X_2 - X_3 = 13$$

المرحلة الاولى في الحل وهي التأكد من وجود حل

Basic	X_1	X_2 ↓	X_3	X_4	R_1	R_2	Solution
← R_1	-2	3	0	0	1	0	3
R_2	4	5	-1	0	0	1	10
X_4	1	2	0	1	0	0	5
r	2	8	-1	0	0	0	13

Pivot element = 3

Pivot equation = (-2/3 , 1 , 0 , 0 , 1/3 , 0 , 1)

New r = (2 , 8 , -1 , 0 , 0 , 0 , 13) - (-16/3 , 8 , 0 , 0 , 8/3 , 0 , 8)
= (22/3 , 0 , -1 , 0 , -8/3 , 0 , 5)

New R_2=(4 , 5 , -1 , 0 , 0 , 1 , 10) - (-10/3 , 5 , 0 , 0 , 5/3 , 0 , 5)
= (22/3 , 0 , -1 , 0 , -5/3 , 1 , 5)

New X_4 = (1 , 2 , 0 , 1 , 0 , 0 , 5) - (-4/3 , 2 , 0 , 0 , 2/3 , 0 , 2)
= (7/3 , 0 , 0 , 1 , -2/3 , 0 , 3)

X_2	-2/3	1	0	0	1/3	0	1
← R_2	22/3	0	-1	0	-5/3	1	5
X_4	7/3	0	0	1	-2/3	0	3
r	22/3	0	-1	0	-8/3	0	5

المتغير الداخل X_1 والمتغير الخارج R_2

ivot element = 22/3

ivot equation = (1 , 0 , -3/22 , 0 , -5/22 , 3/22 , 15/22)

ew r = (22/3 , 0 , -1 , 0 , -8/3 , 0 , 5) - (22/3 , 0 , -1 , 0 , -5/3 , 1 , 5)
= (0 , 0 , 0 , 0 , -1 , -1 , 0)

ew X_2 =(-2/3 , 1 , 0 , 0 , 1/3 , 0 , 1)
+(2/3 , 0 , -2/22 , 0 , -10/66 , 2/22 , 10/22)
= (0 , 1 , -1/11 , 0 , 2/11 , 1/11 , 16/11)

ew X_4 = (7/3 , 0 , 0 , 1 , -2/3 , 0 , 3)
- (7/3 , 0 , -7/22 , 0 , -35/66 , 7/22 , 35/22)
= (0 , 0 , 7/22 , 1 , -3/22 , -7/22 , 31/22)

S_1 S_2

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	Solution
X_2	0	1	-1/11	0	2/11	1/11	16/11
X_1	1	0	-3/22	0	-5/22	3/22	15/22
X_4	0	0	7/22	1	-3/22	-7/22	31/22
r	0	0	0	0	-1	-1	0

من الجدول أعلاه يظهر أن r=0 وبالتالي يوجد حل وننتقل الان الى المرحلة الثانية وتبدأ هذه المرحلة بحذف قيم R_1 ، R_2 من جدول حل المرحلة الاولى وبالتالي تكو القيود كالتالي :

$$X_2 - 1/11\,X_3 = 16/11$$
$$X_1 - 3/22\,X_3 = 15/22$$
$$7/22\,X_3 + X_4 = 31/22$$

نجد من القيدين الاول والثاني أن :

$$X_2 = 16/11 + 1/11\,X_3$$
$$X_1 = 15/22 + 3/22\,X_3$$

نرجع الى دالة الهدف الاصلية $Z = 2X_1 + 3X_2$ ونعوض في قيمة X_2 ، X_1 بدلالة X_3 فتصبح دالة الهدف :

$$Z = 3(16/11 + 1/11\,X_3) + 2(15/22 + 3/22\,X_3)$$
$$= 48/11 + 3/11\,X_3 + 30/22 + 6/22\,X_3$$
$$= 63/11 + 6/11\,X_3$$
$$Z - 6/11\,X_3 = 63/11$$

ويكون جدول الحل للمرحلة الثانية كما يلي :

↓

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	Solution
X_2	0	1	-1/11	0	16/11
X_1	1	0	-3/22	0	15/22
← X_4	0	0	7/22	1	31/22
Z	0	0	-6/11	0	63/11

Pivot element = 7/22

pivot equation = (0 , 0 , 1 , 22/7 , 31/7)

New Z = (0 , 0 , -6/11 , 0 , 63/11) + (0 , 0 , 6/11 , 12/7 , 186/77)
= (0 , 0 , 0 , 12/7 , 57/7)

New X_2 = (0 , 1 , -1/11 , 0 , 16/11) + (0 , 0 , 1/11 , 2/7 , 31/77)
= (0 , 1 , 0 , 2/7 , 13/7)

وبالتالي يكون جدول الحل الامثل هو :

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	Solution
X_2	0	1	0	2/7	13/7
X_1	1	0	0	3/7	9/7
X_3	0	0	1	22/7	31 $\cancel{13}/7$
Z	0	0	0	12/7	57/7

فيكون الحل الأمثل :

$$X_1 = 9/7$$
$$X_2 = 13/7$$
$$Z = 57/7$$

وهو نفس الحل الذي حصلنا عليه في طريقة (م) الكبرى.

حالات خاصة من البرمجة الخطية

سوف نعرض في هذا الجزء بعض الحالات التي تظهر في حل نموذج البرمجة الخطية سواء بالطريقة البيانية او بالطريقة المبسطة وهذه الحالات هي :-

١ - التكرار (التفسخ) Degeneracy

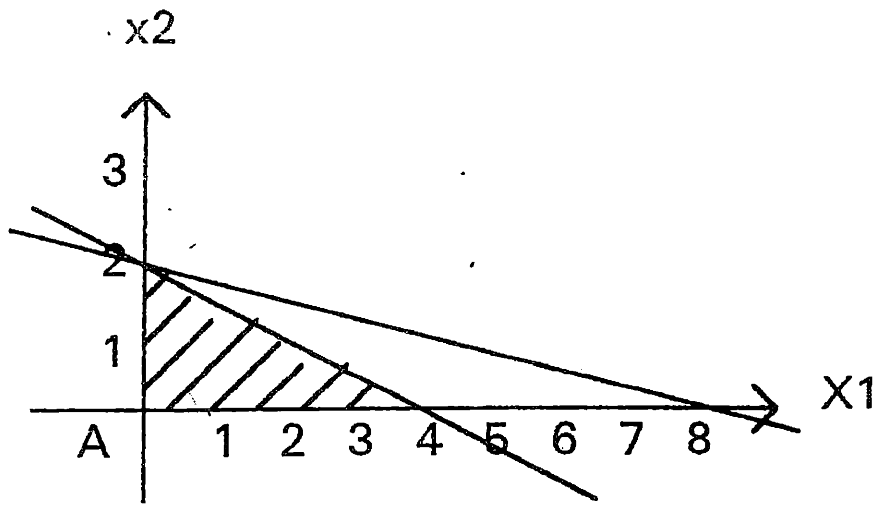
عند الوصول الى الحل في مرحلة من المراحل بالطريقة المبسطة فإن هذ الحل لا يتغير ويتكرر نفسه اما في حالة الطريقة البيانية فإن احد القيود يكون اضافي لا حاجة له وليس له اي تأثير على الحل، وسنوضح هذه الحالة في المثال التالي:-

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 7X_2$$

subject to,

$$2X_1 + 8X_2 \leq 16$$
$$2X_1 + 4X_2 \leq 8$$
$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

لحل بالطريقة البيانية يكون كالتالي :



ـحظ هنا ان القيد الثاني ليس له اي تأثير على منطقة الحل.

ا الحل بالطريقة المبسطة، ففي البداية نحول النموذج الى الشكل القياسي.

$$Z - 3X_1 - 7X_2 = 0$$

subject to,

$$2X_1 + 8X_2 + S_1 = 16$$
$$2X_1 + 4X_2 + S_2 = 8$$

فيما يلي جداول الحل بالطريقة المبسطة .

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	solutio
1	S_1	2	8	1	0	16
	S_2	2	4	0	1	8
	Z	-3	-7	0	0	0
2	X_2	1/4	1	1/8	0	2
	S_2	1	0	-1/2	1	0
	Z	-5/4	0	7/8	0	14
3	X_2	0	1	0	-1/4	2
	X_1	1	0	-1/2	1	0
	Z	0	0	1/4	5/4	14

الحل.

٢- الحل البديل (Alternative Solution)

وهي احتمالية وجود أكثر من قيمة للمتغيرات لحل واحد لدالة الهدف وسنوضح هذه الفكرة بالطريقتين البيانية والمبسطة.

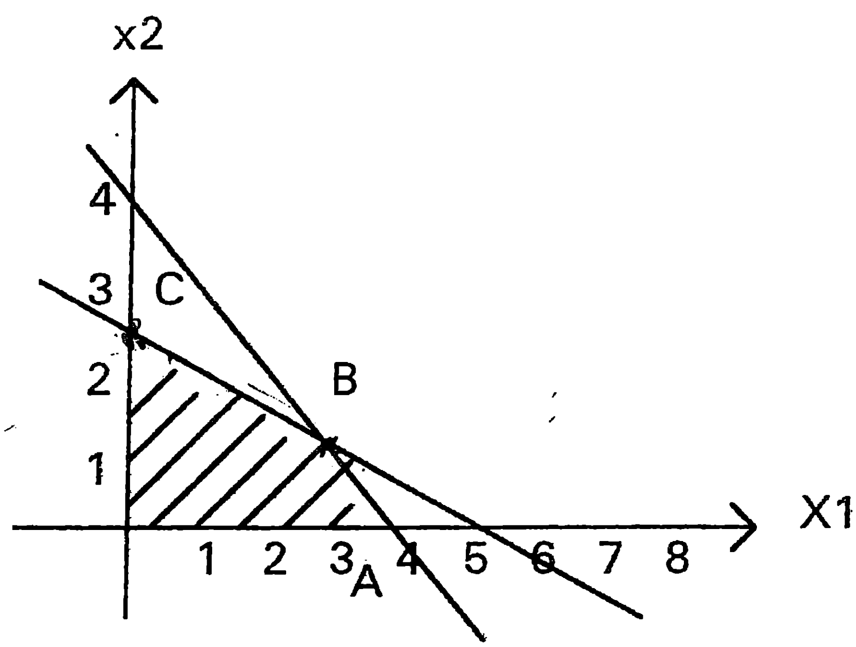
مثال :-

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$

subject to.

$$X_1 + 2X_2 \leq 5$$
$$X_1 + X_2 \leq 4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أولا : بالطريقة البيانية :



نلاحظ أن قيمة Z عند النقطة B هي 10 وأيضا عند النقطة C هي 10 ، ولكن المتغيرات عند هذه النقاط مختلفة ولذلك الحل يعطينا أكثر من قيمة للمتغيرات و قيمة واحدة لدالة الهدف لا تتغير.

أما في الطريقة المبسطة، ففي البداية تحول الى الشكل القياسي ليصبح :

$$Z - 2X_1 - 4X_2 = 0$$

subject to,

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 5$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 4$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

وتكون جداول الحل كالاتي :-

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	solution
1	S_1	1	2	1	0	5
	S_2	1	1	0	1	4
	Z	-2	-4	0	0	0
2	X_2	1/2	1	1/2	0	5/2
	S_2	1/2	0	-1/2	1	3/2
	Z	0	0	2	0	10
3	X_2	0	1	1	-1	1
	X_1	1	0	-1	2	3
	Z	0	0	2	0	10

وهنا نجد أن الجدول الثاني والثالث تعطي نفس القيمة لدالة الهدف ولكن بقيم مختلفة للمتغيرات X_1, X_2 كما في الحل البياني.

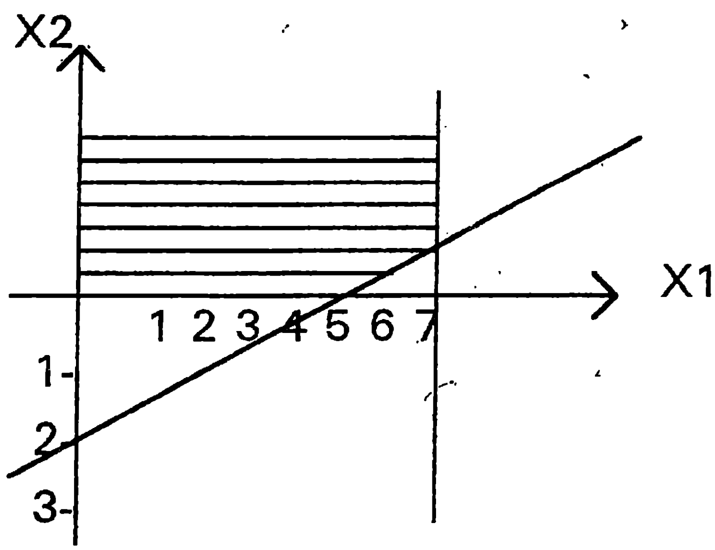
٣- منطقة الحل الغير محدودة : (Unbounded Solution space)

وفي هذه الحالة تكون منطقة الحل مفتوحة وليست مغلقة وبالتالي لا يكون لها حدود وتظهر هذه الحالة جلية في الحل بالطريقة البيانية، لاحظ ذلك في المثال التالي :

Subject to,

$$X_1 - 2X_2 \le 5$$
$$X_1 \le 7$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

ولتحديد منطقة الحل بالرسم البياني تكون كالاتي :-



نلاحظ هنا أن منطقة الحل مفتوحة من أعلى اي ليس لها حدود.

٤- عدم توفر الحل : (Infeasible Solution)

وتكون منطقة الحل للقيود في هذه الحالة متعاكسة اي لا تتقاطع في منط حل واحدة للقيدين في الطريقة البيانية.

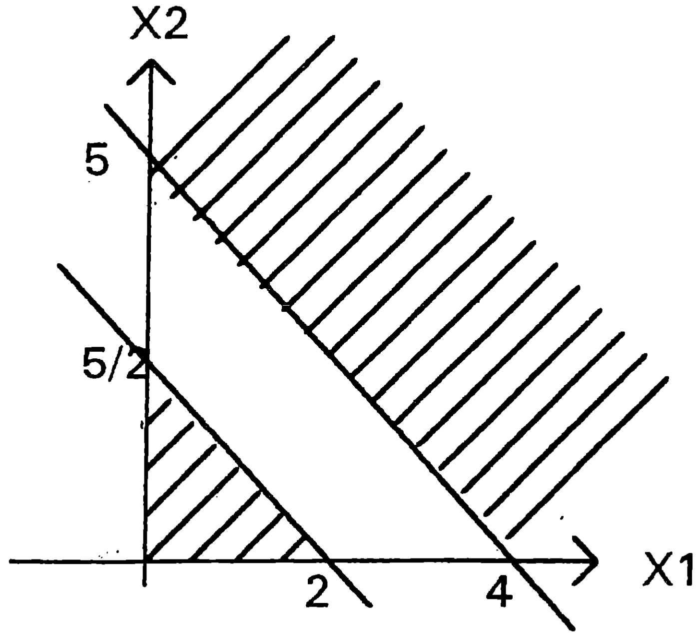
مثال :-

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$$

Subject to,

$$5/2X_1 + 2X_2 \le 5$$
$$5X_1 + 4X_2 \ge 20$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

تحديد منطقة الحل بالرسم البياني تكون كالاتي :-



نلاحظ هنا أن منطقتنا الحل للقيدين الاول والثاني متعاكستان ولا يتقاطعان نهائيا.

س١ : شركة صناعية كبرى ترغب في تحديد عدد الوحدات الواجب انتاجها م
السلع C, B, A بما يحقق الحد الاقصى من الارباح، وتمتلك الشركة الا
4, 3, 2, 1 والجدول التالي يعطي الوقت المستغرق لكل سلعة على كل آلة، وكذا
يعطي الوقت المتاح لكل آلة.

الالات	السلع			ساعة/اسبوعيا الوقت المتاح
	A	B	C	
1	3	0	5	60
2	0	2	1	65
3	2	1	0	40
4	1	5	1	55

اذا علمت ان ربح الوحدة الواحدة من السلع C, B, A هي على التوالي 9 ,7
دينار.

اكتب نموذج برمجة خطية يحقق رغبة الشركة.

س٢ : تقوم احدى شركات السجاد بانتاج نوعين من انواع السجاد هما A ,B و
كل نوع من السجاد بثلاث مراحل هي :

١- مرحلة تقطيع اطوال السجاد بعد انتاجها في قسم اخر من الشركة.
٢- مرحلة طي الاطوال على شكل لفات.
٣- مرحلة التغليف بمواد معينة لغرض بيعها في الاسواق.

دول التالي يوضح البيانات الخاصة بالمسألة :

الوقت المتاح/ دقيقة	انوع السجاد		مراحل الانتاج
	B	A	
2200	6	8	التقطيع
1100	4	4	الطي
400	2	1	التغليف

تمثل البيانات في الجدول اعلاه التفصيلات الفنية للمنتجين B, A فمثلا اج وحدة واحدة من المنتج A نحتاج الى 8 دقائق لاجراء عملية التقطيع 4 دقائق راء عملية الطي، دقيقة واحدة لاجراء عملية التغليف. أما الوقت المتاح في يات التقطيع هو 2200 دقيقة وفي عمليات الطي 1800 دقيقة وفي عمليات ليف 400 دقيقة.اذا علمت أن الربح المتوقع عند بيع وحدة واحدة من النوع A وي 12 دينار ومن النوع B يساوي 8 دنانير.

اكتب نموذج البرمجة الخطية بحيث تكون الارباح الناجمة عن عملية الانتاج ر ما يمكن.

٣ : تقوم احدى الشركات بانتاج انواع مختلفة من مساحيق الغسيل فإذا وردت الى ركة طلبية للحصول على 12000 كيلو غرام من مسحوق معين.

ون المسحوق من ثلاث مركبات هي C, B, A والمواصفات المطلوبة لذلك سحوق كما وردت في الطلبية مبينة كما يلي :

- يجب ان يحتوي المسحوق على الاقل 3000 كيلوغرام من المركب B.
- يجب ان لا يحتوي المسحوق على اكثر من 4000 كيلوغراما من المركب A.
- يجب ان يحتوي المسحوق على الاقل 2000 كيلوغرام من المركب C.

اذا علمت ان كلفة الكيلوغرام من المركب B تساوي 2 دينار، وكلفة كيلوغرام من المركب B تساوي 3 دنانير، وكلفة الكيلوغرام من المركب C ساوي 4 دينار.

تب صيغة البرمجة الخطية والذي يعطي أقل التكاليف.

يتكون من مزيج من المواد الغذائية والتي تطحن في مطاحن خاصه لتصبح جاه للاستعمال.

اذا كان تكلفة الوحدة الواحدة للنوع الاول من العلف تساوي 41 دينـ وللنوع الثاني 35 دينار بالاعتماد على هذه المعلومات، وعلى المعلومات الواردة الجدول ادناه جد نموذج رياضي امثل للعلف الحيواني، بحيث تكون التكاليف اقل يمكن وتحقق الاحتياجات الاسبوعية.

الاحتياجات الاسبوعية/ كغم	نوع العلف		نوع المادة في تركيبة العلف
	B	A	
1250	3	2	I
250	1	1	II
900	3	5	III
232.5	0.25	0.6	IV

س٥ : مؤسسة صناعية تقوم بانتاج علب معدنيـة تستخدم لاغراض تعليب الـ الغذائية. وردت الى المصنع طلبية بالحاجة الى اربع انواع (اشكال) من العلـ .D, C, B

درست المؤسسة الطلبية واجرت اختباراتها الاولية لكي تتخذ قرارها تحديد امكانية انتاج الانواع الاربعة ليحقق أعلى الارباح. توفرت للمؤ المعلومات والبيانات التالية :

ان كل نوع يجب ان يمر خلال مراحله التصنيعية على اربع مكائن :

الماكنة الاولى : تقوم بتقطيع الصفائح بالقياسات التي تخص كل نوع من الانو
الماكنة الثانية : تقوم بلي الصفائح المقطعة.
الماكنة الثالثة : تقوم بلحام ووصل القطع المختلفة لكي تتخذ الشكل المطلوب.
الماكنة الرابعة : تقوم بالصباغة والطباعة على العلب.

الجدول التالي يبين الزمن اللازم لانتاج كل نوع من الانواع الاربعة عند مروره بمراحل التصنيع على المكائن الاربعة، كما يبين الطاقة التشغيلية القصوى بالساعات في اليوم الواحد لكل ماكنة، كما يبين الجدول الربح الذي يتحقق من انتاج كل نوع من الانواع الاربعة.

المكائن	أنواع العلب				الطاقة التشغيلية
	A	B	C	D	
الماكنة الاولى	1	2	1	1	8
الماكنة الثانية	3	1	2	3	9
الماكنة الثالثة	1	3	3	3	6
الماكنة الرابعة	2	−	2	−	4
الربح بالدينار	2	1	4	5	

ملاحظة : ان الرمز (−) في الجدول يعني ان النوع B لايمر بالماكنة الرابعة.

اكتب نموذج برمجة خطية لهذه المسألة بحيث يحقق اقصى ربح ممكن.

س٦: اوجد الحل الامثل للنموذج التالي بطريقة الرسم البياني.

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 3X_2$$

Subject to,

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$-X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

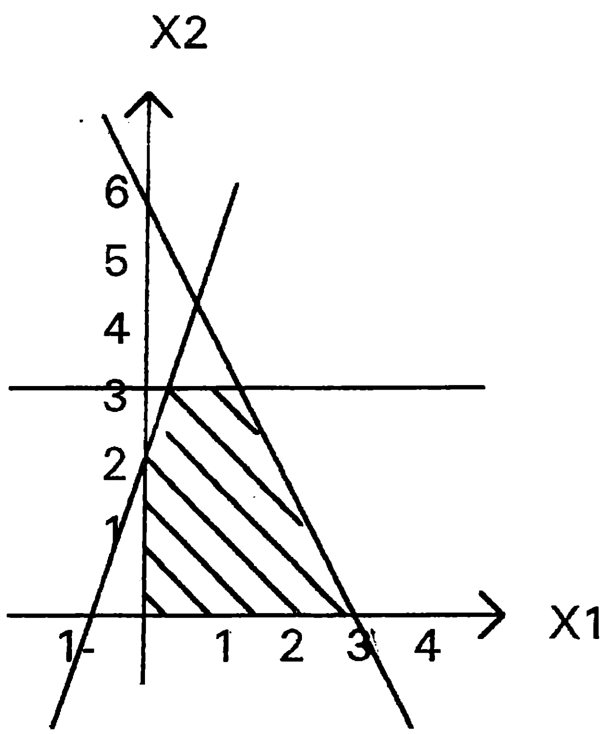
س٧: أوجد الحل الامثل للنموذج في السؤال السابق اذا كانت دالة الهدف :

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 3X_2$$

Subject to,

$$X_1 + X_2 \leq 10$$
$$X_1 \geq 5$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

س٩: أوجد الحل الامثل للشكل التالي حسب دالة الهدف المعطى لاحقا.



أ - $Max\ Z = 2X_1 + X_2$

ب- $Max\ Z = 5X_1 + 3X_2$

جـ- $Min\ Z = 3X_1 + 2X_2$

د - $Min\ Z = X_1 + X_2$

س١٠: ما هي القيود التي تمثل الرسم في السؤال التاسع.

س١١: تقوم شركة لصناعة الحقائب الجلدية بانتاج ثلاثة انواع من الحقـائب، وتمـر كل من هذه الحقائب بثلاث مراحل انتاجية C, B, A والجدول التالي يوضح الوقت اللازم لكل مرحلة من المراحل وسعر بيع القطعة الواحدة من كل نوع من الحقائب.

نوع الحقيبة	سعر بيع القطعة بالدينار	الوقت اللازم لكل مرحلة		
		A	B	C
حقيبة سفر	25	9	4	18
حقيبة يد	17	18	3	3
حقيبة مدرسية	10	2	12	2

الوقت المتاح للانتاج في اليوم لكل مرحلة هو كالاتي المرحلة A هو 1200 دقيقـة مرحلة B هو 1400 دقيقة، المرحلة C هو 1010 دقيقة، والمطلوب :-

- تشكيل نموذج البرمجة الخطية.

ب- حل النموذج بالطريقة المبسطة Simplex Method.

س١٢: أوجد الحل الامثل للمسائل التالية بالطريقة المبسطة Simplex Method:-

أ-

$$\text{Max } Z = 16X_1 + 15X_2$$

Subject to,

$$40X_1 + 31X_2 \le 124$$
$$-X_1 + X_2 \le 1$$
$$X_1 \le 3$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

ب -

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 6X_2$$

Subject to,

$$3X_1 + 5X_2 \le 12$$
$$5X_1 + 6X_2 \le 14$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 2$$
$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 3$$
$$6X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 8$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

س١٣: اوجد الحل الامثل للمسائل التالية بطريقة (م) الكبرى :-

أ-

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

Subject to,

$$X_1 + X_2 \geq 2$$
$$2X_1 + 3X_2 \leq 4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

ب-

$$\text{Min } Z = X_1 + 2X_2 + 4X_3$$

Subject to,

$$X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 1$$
$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 3$$
$$X_1 + 2X_3 \leq 3$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

جـ-

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 5X_2$$

Subject to,

$$-X_1 + 3X_2 \leq 2$$
$$X_1 + X_2 \geq 2$$
$$X_2 = 3$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

د-

$$\text{Max } Z = 2X_1 + X_2 + 4X_3$$

Subject to,

$$X_1 - X_2 = 1$$
$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 6$$
$$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 3$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

س١٤: أعد حل المسائل في السؤال الثالث عشر بطريقة المرحلتين.

س١٥: بين ان النموذج التالي يحتوي على حل متكرر.

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 9X_2$$

Subject to,

$$X_1 + 4X_2 \leq 8$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

س١٦: بين ان النموذج التالي يحتوي على حلول بديلة.

$$\text{Max } Z = 2X_1 - X_2 + 3X_3$$

Subject to,

$$X_1 - X_2 + 5X_3 \leq 10$$
$$2X_1 - X_2 + 3X_3 \leq 40$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

س١٧: بين ان منطقة الحل للنموذج التالي غير محدودة.

$$\text{Max } Z = 3X_1 + X_2$$

Subject to,

$$X_1 - X_2 \leq 2$$
$$X_1 \leq 3$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Subject to,

$$\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} \leq 1$$

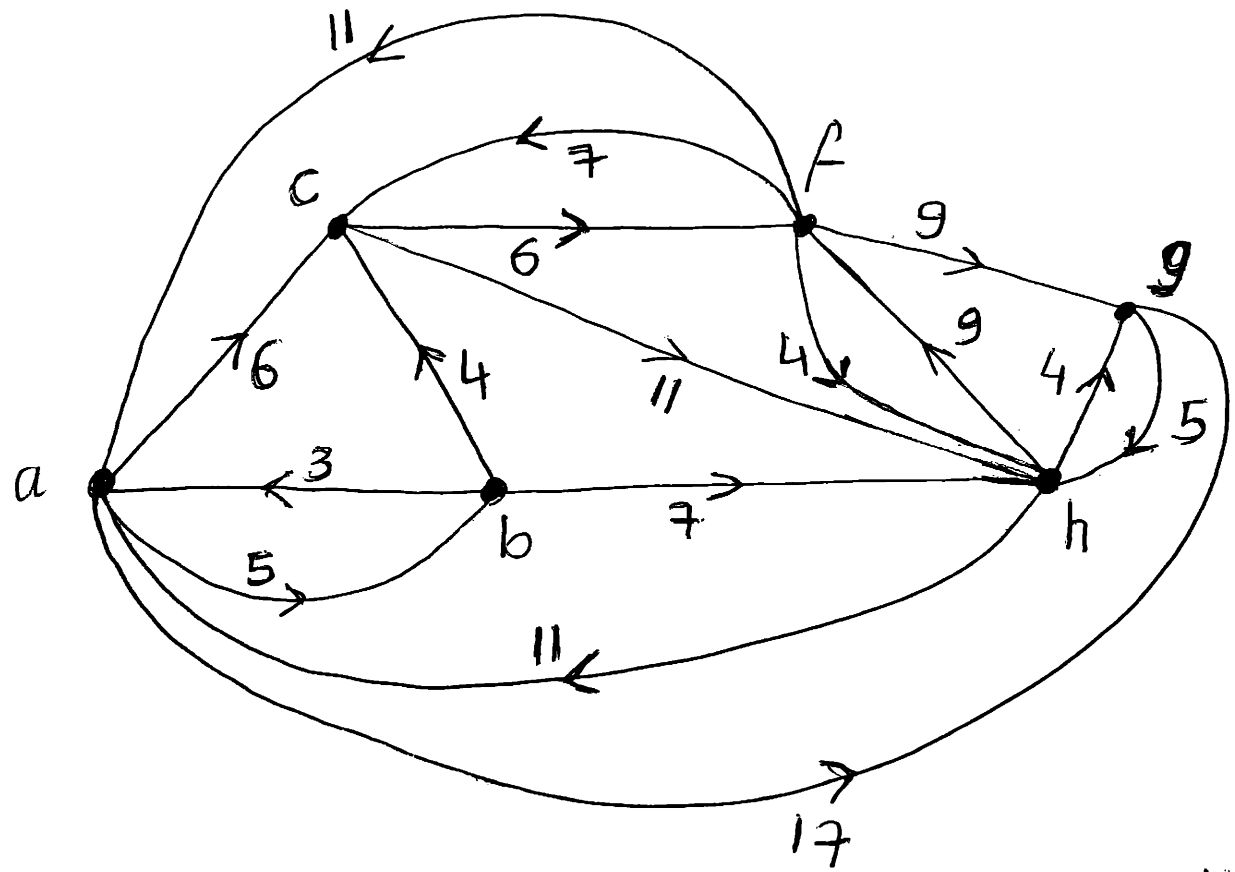
$$2\mathbf{X_1} + 4\mathbf{X_2} \geq 8$$

$$\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2} \geq 0$$

Shortest-path Problem　　مسألة أقصر طريق

تمهيد: ما هي الشبكة؟ هي مجموعة من العقد ومجموعة من الأفرع أو الوصلات أو الحواف التي تصل بين أزواج العقد. والشبكات التي ستوضع في الاعتبار ومحل دراستنا هي الشبكات الموجهة أي على كل حافة سهم يشير إلى اتجاه الحافة. وكل حافة يوجد عليها عدد غير سالب يسمى بوزن الحافة وهنا الشبكة أو الرسم لابد أن يكون مترابط. والشكل التالي يمثل شبكة موجهة مترابطة:

شكل I



$$wt(x,y) \neq wt(y,x)$$

$$wt(c,f)=6 \neq wt(f,c)=7$$

$$wt(g,c)=wt(c,g)=\infty$$

لاحظ في هذا الرسم أن
مثلاً على سبيل المثال
كذلك

وهذه حقيقة بالنسبة لباقي العقد .

لاحظ كذلك $wt(a,f)=\infty$ و $wt(f,a)=11$ عدد محدود

ونرمز بالرمز $d(a,b)$ نعني أقصر مسافة من a إلى b وإذا لم يوجد مسار من a إلى b فإننا نكتب $d(a,b)=\infty$

كذلك $d(a,a)=0$

مثال:

اعتبر شكل I والمطلوب إيجاد أقصر مسافة من الرأس C إلى بقية الرؤوس الخمسة الباقية.

ولحل هذا المثال نستخدم طريقة Dijkstra ونشرحها على المثال الموجود.

كذلك لابد من ملاحظة أن الرمز $L(f)$ يعني المسافة من c إلى f .

التكرار الأول: $i=1$

الطريقة: نضع $S_1=\{c\}$, $S_1^c=\{a,f,b,g,h\}$ وسوف نرمز الرأس c بـ $(0,-)$ وبقية الرؤوس الأخرى بالرمز $(\infty,-)$ كما يلي:

$c\,(0,-)$ $\quad f\,(\infty,-)$ $\quad g\,(\infty,-)$

$a\,(\infty,-)$ $\quad b\,(\infty,-)$ $\quad h\,(\infty,-)$

ثم نوجد المسافة بين العقدة c الواقعة في الفئة S_1 وبين جميع العقد الواقعة في S_1^c كما يلي:

المسافة من c إلى a

$$L(a)=\min\{L(a),\ L(c)+wt(c,a)\}$$
$$=\min\{\infty,\ 0+\infty\}=\infty$$
$$L(f)=\min\{L(f),\ L(c)+wt(c,f)\}$$
$$=\min\{\infty,\ 0+6\}=6$$

حسب الترتيب على الرؤوس

$$L(b) = \min\{L(b), L(c) + wt(c,b)\}$$ من الرسم

$$= \min\{\infty, 0 + \infty\} = \infty$$

$$L(g) = \min\{L(g), L(c) + wt(c,g)\}$$

$$= \min\{\infty, 0 + \infty\} = \infty$$

$$L(h) = \min\{L(h), L(c) + wt(c,h)\}$$

$$= \min\{\infty, 0 + 11\} = 11$$

نرقم الرؤوس: f بـ $(6,c)$ و h بـ $(11,c)$

وباقي الرؤوس في S_1^c بـ $(\infty,-)$ كما يلي:

$c\,(0,-)$ $f\,(6,c)$ $g\,(\infty,-)$

$a\,(\infty,-)$ $b\,(\infty,-)$ $h\,(11,c)$

التكرار الثاني:

نلاحظ هنا أن الرأس f في S_1^c أقرب رأس إلى c إذن نعيد

الرؤوس كما يلي

$S_2 = \{c, f\}$, $S_2^c = \{a, b, g, h\}$

نعين $L(v)$ حيث $v \in S_2^c$ بالقانون

$$L(v) = \min\{L(v), L(u) + wt(u,v)\}$$

$$L(a) = \min\{L(a), L(c) + wt(c,a), L(f) + wt(f,a)\}$$ حيث

$$= \min\{\infty, 0 + \infty, 6 + 11\} = 17$$

نرقم الرأس a بـ $(17,f)$

$$L(b) = \min\{L(b), L(c) + wt(c,b), L(f) + wt(f,b)\}$$

$$= \min\{\infty, 0 + \infty, 6 + \infty\} = \infty$$

$$L(g) = \min\{L(g), L(c)+wt(c,g), L(f)+wt(f,g)\}$$
$$= \min\{\infty, 0+\infty, 6+9\} = 15$$

$$L(h) = \min\{L(h), L(c)+wt(c,h), L(f)+wt(f,h)\}$$
$$= \min\{11, 0+11, 6+4\} = 10$$

نرقم كما يلي :

$c(0,-)$ $f(6,c)$ $g(15,f)$

$a(17,f)$ $b(\infty,-)$ $h(10,f)$

التكرار الثالث :

$S_3 = \{c, f, h\}$, $S_3^c = \{a, b, g\}$

$$L(a) = \min\{L(a), L(c)+wt(c,a), L(f)+wt(f,a), L(h)+wt(h,a)\}$$
$$= \min\{17, 0+\infty, 6+11, 10+11\} = 17$$ الترقيم على a لا يتغير

$$L(b) = \min\{L(b), L(c)+wt(c,b), L(f)+wt(f,b), L(h)+wt(h,b)\}$$
$$= \min\{\infty, 0+\infty, 6+\infty, 10+\infty\} = \infty$$ كما هو الترقيم هنا

$$L(g) = \min\{L(g), L(c)+wt(c,g), L(f)+wt(f,g), L(h)+wt(h,g)\}$$
$$= \min\{15, 0+\infty, 6+9, 10+4\} = 14$$

الترقيم على g يتغير الى $(14,h)$

الترقيم :

$c(0,-)$ $f(6,c)$ $g(14,h)$

$a(17,f)$ $b(\infty,-)$ $h(10,f)$

التكرار الرابع: اقرب عقدة للمجموعة S_3 هي g إذن يكون لدينا

$$S_4 = \{c, f, h, g\} \quad , \quad S_4^c = \{a, b\}$$

$$L(a) = \min\{L(a), L(c)+wt(c,a), L(f)+wt(f,a), L(h)+wt(h,a), L(g)+wt(g,a)\}.$$

$$= \min\{17, 0+\infty, 6+11, 10+11, 14+\infty\}$$

$$= 17$$ لا يتغير

$$L(b) = \min\{L(b), L(c)+wt(c,b), L(f)+wt(f,b), L(h)+wt(h,b), L(g)+wt(g,b)\}$$

$$= \min\{\infty, 0+\infty, 6+\infty, 10+\infty, 14+\infty\} = \infty$$

الأقرب في هذا التكرار هو a

مع ملاحظة الترقيم كما هو - - - - - - -

التكرار الخامس:

$$S_5 = \{c, f, h, g, a\}, \quad S_5^c = \{b\}$$

$$L(b) = \min\{\quad , L(a)+wt(a,b)\}$$

$$= \min\{- - - - , 17+5\} = 22$$

$$S_6 = \{c, f, h, g, a, b\} \quad , \quad S_6^c = \varphi$$

نتوقف، ويكون لدينا .

الترتيب :

$c(0,-)$ $\quad f(6,c)$ $\quad g(15,h)$

$a(17,f)$ $\quad b(22,a)$ $\quad h(10,f)$

$$\left.\begin{aligned} d(c,f) &= L(f) = 6 \\ d(c,h) &= L(h) = 10 \\ d(c,g) &= L(g) = 15 \\ d(c,a) &= L(a) = 17 \\ d(c,b) &= L(b) = 22 \end{aligned}\right\}$$

هذه هي المسافة بين العقدة c وباقي العقد في الرسم .

ولإيجاد المسار نجد أنه :

$d(c,f) = 6 \Longleftrightarrow c \to f$

$d(c,h) = 10 \Longleftrightarrow c \to f \to h$

$d(c,g) = 15 \Longleftrightarrow c \to f \to h \to g$

$d(c,a) = 17 \Longleftrightarrow c \to f \to a$

$d(c,b) = 22 \Longleftrightarrow c \to f \to a \to b$

تمرين : حل المثال السابق وذلك لإيجاد أقصر مسافة من العقدة a إلى باقي العقد في الرسم .